

THÉORÈME DES RESTES CHINOIS

1) $n \equiv 3 [5]$ et $n \equiv 2 [7]$

2)

2.a) $5p + 3 = 7q + 2 \Rightarrow 7q - 5p = 1 \quad (E).$

2.b) D'après le théorème de Bézout, si a et b sont deux nombres entiers relatifs premiers entre eux (dont le PGCD est égal à 1), alors il existe deux nombres entiers relatifs c et d tels que $ac + bd = 1$. Les nombres -5 et 7 étant premiers entre eux, il en découle que (E) admet au moins une solution dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

2.c) Une solution de (E) dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est $(p = 4, q = 3)$.

2.d) L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est : $(p = 4 + 7k, q = 3 + 5k)$ avec $k \in \mathbf{N}$.
On vérifie aisément que $7(3 + 5k) - 5(4 + 7k) = 21 + 35k - 20 - 35k = 1$.

3) L'ensemble S est alors l'ensemble des entiers de la forme :
 $n = 5(4 + 7k) + 3 = 7(3 + 5k) + 2 = 23 + 35k$ avec $k \in \mathbf{N}$