SUITES – RÉCURRENCE – LIMITE

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :
$u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n}$.

PARTIE A

A.1)

n	1	2	3	100
u_n	$\frac{1}{3} = 0,333$	$\frac{5}{9} = 0,556$	$\frac{2}{3} = 0,666$	0,749

A.2) On peut conjecturer que (u_n) est croissante.

A.3) On constate que $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \geq 1$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \geq 2$. Montrons que si $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$, alors $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+1$ pour tout entier $n \geq 2$:
$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{3}{2} n \geq n+1$ pour tout entier $n \geq 2$. Par récurrence on en déduit que $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$ pour tout $n \geq 1$.

A.4) $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n \Rightarrow \frac{1}{2^n} \geq \frac{n}{3^n}$. On peut alors écrire que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$.
Le second membre de cette inégalité est u_n, et le premier est la somme des termes d'une progression géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$. Cette somme est égale à $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et elle tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On en conclut que :
$u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et 1 est donc un majorant de u_n.

A.5) D'après A.3), $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+1 \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Or, $\frac{n+1}{3^{n+1}} = u_{n+1} - u_n$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, ce qui montre que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et prouve que u_n est convergente.

PARTIE B

B.1) On vérifie que :
$n = 0$: $3 > 0$,
$n = 1$: $9 > 4$ et
$n = 2$: $27 > 18$
On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$:
$3^{n+1} > n(n+1)^2$. (1)
Si l'inégalité (1) est vraie pour n,
montrons que $3^{(n+1)+1} > (n+1)[(n+1)+1]^2$ pour tout $n \geq 2$:
D'après (1), on peut écrire :
$3(3^{n+1}) = 3^{(n+1)+1} > 3n(n+1)(n+1)$. Comparons $3n(n+1)$ et $[(n+1)+1]^2$.
$[(n+1)+1]^2 = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = 3n(n+1) - (2n^2 - n - 4)$.
En remarquant que $2n^2 - n - 4 > 1$ pour tout entier $n \geq 2$, on en déduit que :
$3n(n+1) > [(n+1)+1]^2$, et donc que
$3^{(n+1)+1} > 3n(n+1)^2 > (n+1)[(n+1)+1]^2$ pour tout entier $n \geq 2$.
Puisque l'inégalité (1) est vérifiée pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, elle vraie pour tout entier naturel n.

B.2) Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on pose $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
On a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)^2 - 3^{n+1}}{3^{n+1}n(n+1)}$.
Et puisque $3^{n+1} > n(n+1)^2$, alors $n(n+1)^2 - 3^{n+1} < 0$ et $v_{n+1} - v_n < 0$.
Ceci démontre que (v_n) est décroissante.

B.3) Puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la limite de (v_n) est celle de (u_n), c'est à dire l.

B.4) On remarque que $u_n < l < v_n$ pour tout entier naturel n.
Avec la calculatrice, on trouve que $u_6 < l < v_{200}$ avec une amplitude de 10^{-2} soit :
$0{,}745 < l < 0{,}755$.