SUITES – BAC S POLYNÉSIE 2014

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1) $u_1 = 2$ et $u_2 = 6$

2) C'est l'algorithme N°2 qui affiche u_n. Le N°1 affiche u_{n+1}.

3)

3.a) D'après le tableau et la figure, on conjecture que (u_n) est monotone croissante. On le démontre en calculant que $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3.b) On conjecture que $u_n = an^2 + bn + c$.
Puisque $u_0 = 0$, il est immédiat que $c = 0$. On a alors $u_n = an^2 + bn = n(an + b)$. En prenant $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système d'équations suivant où a et b sont les inconnues :
$u_1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$ et
$u_2 = 6 \Rightarrow 2a + b = 3$.
On le résout aisément pour trouver $a = b = 1$. On conjecture donc que
$u_n = n^2 + n = n(n+1)$.

4) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

4.a) $v_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2$. C'est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 2$.

4.b) On définit pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 ... + v_n$. C'est la somme des $(n+1)$ premiers nombres pairs plus grands que 0. Cette somme est égale à

$$S_n = (n+1)\frac{v_0 + v_n}{2} = (n+1)\frac{2 + 2n + 2}{2} = (n+1)(n+2).$$

4.c) D'après la définition de (v_n), on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = (u_1 + u_2 + ... + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + ... + u_n) = u_{n+1} - u_0.$$

Comme $u_0 = 0$, on en tire $S_n = u_{n+1}$, c'est à dire :
$(n+1)(n+2) = u_n + 2n + 2$, d'où l'on calcule facilement que :
$u_n = n(n+1)$,
ce qui démontre la conjecture faite en 3.b).