SUITES – BAC S POLYNÉSIE 2013

(u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)

1.a) $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1} = \dfrac{9}{10}$

1.b) La proposition est vraie pour u_0, u_1 et u_2.
Si elle vraie pour u_n, c'est à dire $u_n > 0$, alors $3u_n > 0$, $2u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} > 0$. La proposition est vraie pour u_{n+1} et, par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On admet $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{3u_n - u_n - 2u_n{}^2}{1+2u_n} = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.
On a $0 < u_n < 1$. Donc $1 - u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n > 0$, d'où $u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ est croissante.

2.b) Comme $0 < u_n < 1$ et (u_n) croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) tend vers une limite $0 < \ell \leq 1$.
On peut préciser ℓ en remarquant que $u_2 = \dfrac{9}{10}$. Alors, $\dfrac{9}{10} < \ell \leq 1$.

3) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.a) Exprimons $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$en fonction de u_n.

$v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1-u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{3u_n}{1-u_n}$. D'où l'on tire $v_{n+1} = 3v_n$. CQFD.

3.b) On calcule facilement que $v_0 = 1$. Alors $v_n = 3^n$.

3.c) $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} = 3^n$, d'où l'on tire aisément $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

3.d) On voit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{3^n+1} = 1$