SUITES – BAC S MÉTROPOLE 2013

Soit la suite (u_n) définie sur **N** par $u_0 = 2$ et pour tout $n > 0$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1)

1.a)

n	0	1	2	3	4
u_n	2	2,33	2,89	3,59	4,40

1.b) On conjecture d'après le tableau précédent que (u_n) est croissante.

2)

2.a) On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$u_n < n + 3$.
On voit que cela est vrai pour u_0 et u_1. Démontrons que si la proposition est vraie pour u_n alors elle est vraie pour u_{n+1}, c'est à dire que l'on doit avoir $u_{n+1} < (n+1) + 3$

$$u_n < n + 3 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n < \frac{2}{3}n + 2 \Rightarrow$$
$$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 < \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1.$$

En remarquant que le premier membre de cette dernière inégalité est égal à u_{n+1}, on a :
$u_{n+1} < n + 3 < (n+1) + 3.$

2.b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$

2.c) Puisque $u_n < n + 3$ pour tout $n \in$ **N**, on en déduit que :
$u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in$ **N**, et donc que (u_n) est croissante, ce qui valide la conjecture précédente.

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

3.a) On calcule v_{n+1} :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n).$$

C'est à dire : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$, d'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$.

Ceci démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Son premier terme est $v_0 = u_0 - 0 = 2$, et son terme général est $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3.b) On déduit de ce qui précède que :

$$u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

3.c) En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, on détermine que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

4) Pour tout entier naturel n non nul on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

et

$$T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

4.a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_k + k) = \sum_{k=0}^{n} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k$, c'est à dire la somme de la somme des termes de la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 2 d'une part, et des termes de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0 d'autre part. Ce qui donne :

$$S_n = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{1}{2}n(n+1).$$

4.b) L'expression précédente peut s'écrire :

$S_n = 6 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. Alors :

$T_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{6}{n^2} - \frac{6}{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. D'où l'on déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} (T_n) = \frac{1}{2}.$$