ALGORITHMES – BAC S AMÉRIQUE DU NORD 2014

1) La conservation du volume total du circuit se traduit par $a_n + b_n = 2200$.

2) Chaque matin on retire 10% de son volume à A et on lui rajoute 15% du volume de B.
Ceci se traduit par la relation :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{10}{100}a_n + \frac{15}{100}b_n = \frac{18a_n + 3b_n}{20} = \frac{15a_n + 3(a_n + b_n)}{20} = \frac{15a_n}{20} + \frac{3\times 2200}{20}$$ et donc :

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$$

3)

Variables	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1100$, faire :
	Affecter à a la valeur $3*a/4+330$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher n

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - 1320$.

4.a) On a $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$.
D'autre part :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 1320 = \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 = \frac{3}{4}(a_n - 1320)$$, d'où :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n.$$

(u_n) est une suite géométrique de premier terme -520 et de raison $q = \frac{3}{4}$.

4.b) Il suit de ce qui précède que $u_n = -520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $a_n = 1320 - 520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4.c) Cherchons le réel x pour lequel $a_x = b_x = 1100$.
Cela donne l'équation suivante : $1320 - 520\times\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1100$, d'où $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{11}{26}$.

En passant par les logarithmes, on a $x\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$, ce qui donne :

$x = 2{,}9901 \approx 3$. Si on prend la valeur 3 pour n, on obtient :
$a_3 = 1100{,}6$ et $b_3 = 1099{,}4$. Donc au troisième jour les deux bassins ont le même volume d'eau au mètre cube près.