SUITES – BAC S AMÉRIQUE DU NORD 2013

(u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1)

Variables : n est un entier naturel

u est un réel positif

Initialisation : Demander la valeur de n

Affecter à u la valeur 1

Traitement : Pour i variant de 1 à n :

…Affecter à u la valeur $\sqrt{(2u)}$

Fin de Pour

Sortie : Afficher u

1.a) Résultat à 10^{-4} près affiché par l'algorithme ci-dessus pour $n = 3$: 1,8340.
1.b) L'algorithme permet de calculer u_n.
1.c) Valeurs de u_n calculées par l'algorithme :

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

On peut conjecturer que (u_n) est croissante et convergente quand $n \to +\infty$.

2)
2.a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrons par récurrence que $u_n \le 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
La proposition est vraie pour $u_0 = 1$. Si elle vraie pour u_n, démontrons qu'elle est aussi vraie pour u_{n+1} :

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} = \sqrt{2}\sqrt{u_n}$.

$u_n \le 2 \Rightarrow \sqrt{u_n} \le \sqrt{2}$ et $u_{n+1} \le \sqrt{2}\sqrt{2} \Rightarrow u_{n+1} \le 2$.

Alors, par récurrence, $u_n \le 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b) On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = u_n\left(\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} - 1\right)$.

$$u_n \le 2 \Rightarrow \frac{2}{u_n} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{u_n}} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{u_n}} - 1 \ge 0$$

Comme $u_n > 0$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} - 1\right) \ge 0$, et $u_{n+1} \ge u_n$.

Ceci implique que (u_n) est croissante.

2.c) (u_n) est croissante et $0 < u_n \le 2$ impliquent que la suite est convergente et tend vers une limite l telle que $0 < l \le 2$.

3) (v_n) définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.a) Calculons v_0 : $v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

Exprimons v_{n+1} en fonction de u_n :

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2 = \ln(2u_n)^{\frac{1}{2}} - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2u_n - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n - \ln 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2)$$

C'est à dire $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

3.b) De ce qui précède, on peut écrire : $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2 = \ln 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Alors $\ln u_n - \ln 2 = \ln 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ et $\ln u_n = \ln 2 + \ln 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \ln 2 \times 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \ln 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

D'où $u_n = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

3.c) Quand $n \to +\infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = 2$

3.d)

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u < 1{,}999$
	….Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	….Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin tant
Sortie :	Afficher n

NB) L'application de l'algorithme donne $n = 11$.