SUITES – BAC S CENTRES ÉTRANGERS 2013

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

PARTIE A

A.1) On complète l'algorithme :

Variables	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que n < 9
	Affecter à u la valeur (n*u + 1)/[2*(n + 1)]
	Affecter à n la valeur n + 1
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

A.2) On modifie l'algorithme :

Variables	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que n < 9
	Affecter à u la valeur (n*u + 1)/[2*(n + 1)]
	Afficher la variable u
	Affecter à n la valeur n + 1
	Fin Tant que
Sortie	

A.3) Au vu des résultats du tableau, on conjecture que (u_n) est décroissante et tend vers une limite l telle que : $0 \leq l < 0{,}0101$

PARTIE B

On définit la suite $v_n = nu_n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

B.1) Calculons le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. On a :

$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = \frac{(n+1)(nu_n + 1)}{2(n+1)} - 1 = \frac{nu_n + 1}{2} - 1 = \frac{nu_n - 1}{2}$. D'où l'on tire :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{nu_n - 1}{2(nu_n - 1)} = \frac{1}{2}$.

En remarquant que $v_1 = u_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, on en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$.

B.2) De ce qui précède, on peut écrire pour tout entier $n \geq 1$:

$v_n = nu_n - 1 = (0{,}5)^n \Rightarrow u_n = \frac{1 + (0{,}5)^n}{n}$.

B.3) On en déduit que la limite de (u_n) est 0.

B.4) Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + (0{,}5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + (0{,}5)^n}{n} = \frac{n[1 + 0{,}5(0{,}5)^n] - (n+1)[1 + (0{,}5)^n]}{n(n+1)}$.

En développant et réarrangeant le numérateur, on trouve :

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0{,}5n)(0{,}5)^n}{n(n+1)}$.

Le calcul précédent montre que $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que (u_n) est décroissante.

PARTIE C

On propose l'algorithme suivant :

Variables	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geq 0{,}001$
	Affecter à u la valeur $(n*u + 1)/[2*(n + 1)]$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher l'entier n