ARITHMÉTIQUE : SUITE D'ENTIERS – BAC S AMÉRIQUE DU NORD 2011

PARTIE A

Théorème de Gauss : Soit a, b et c trois nombres $\in$ **Z***. Si a divise le produit b c et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Théorème de Bézout : Deux entiers relatifs sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que a u + b v = 1.

Si a divise le produit b c, il existe un nombre relatif k tel que k a = b c
Si a et b sont premiers entre eux, ils satisfont à l'égalité de Bézout : a u + b v = 1.
Multiplions les deux membres de cette égalité par c :
a c u + b c v = c. Comme b c = k a, on a :
a c u + k a v = c
a (c u + k v) = c
donc a divise c.

PARTIE B

1) $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

n	1	2	3	4	5	6
u_n	10	48	250	1392	8050	47448

2) Pour n > 0, on a les égalités suivantes modulo (2) :
$2^n = 0$; $3 = 1$ d'où $3^n = 1$; $6^n = 0$.
Donc $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$ donc u_n est pair pour tout n > 0.
3) Posons n = 2k, k étant un entier naturel non nul.
$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 = (2^2)^k + (3^2)^k + (6^2)^k - 1$.
On a les égalités suivantes modulo (4) :
$(2^2)^k = 0$; $3^2 = 1$ d'où $(3^2)^k = 1$; $(6^2)^k = 0$ donc u_n est divisible par 4 pour tout n pair et non nul.

4) D'après le tableau en 1) : $u_1 = 10$, divisible par 2 ; $u_2 = 48$, divisible par 3 ; $u_3 = 250$, divisible par 5 ; et $u_5 = 8050$, divisible par 7.
Donc 2, 3, 5 et 7 $\in$ (E).

5) Remarquons que si p est un nombre premier > 3, il est premier avec 2, avec 3 et avec 6.

5.a) D'après le petit théorème de Fermat on a:
$2^{p-1} \equiv 1$ [p] qui peut s'écrire $2 \times 2^{p-2} \equiv 1$ [p] et, en multipliant les deux membres de la congruence par 3 :
$6 \times 2^{p-2} \equiv 3$ [p].
Similairement :
$3^{p-1} \equiv 1$ [p] qui peut s'écrire $3 \times 3^{p-2} \equiv 1$ [p] et, en multipliant les deux membres de la congruence par 2 :
$6 \times 3^{p-2} \equiv 2$ [p].

5.b) $u_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{P-2} + 6^{p-2} - 1$
$6\ u_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{P-2} + 6 \times 6^{p-2} - 6$
$6\ u_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{P-2} + 6^{p-1} - 6$
En remarquant que $6^{p-1} \equiv 1$ [p] (petit théorème de Fermat), on a
$6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{P-2} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0$ [p], soit
$6\ u_{p-2} \equiv 0$ [p]

5.c) p est premier avec 6, donc p divise u_{p-2} (théorème de Gauss).
Donc p $\in$ (E).