RÉCURRENCE ET ENCADREMENT

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1) On a $u_0 = 1$ et on calcule que $u_1 = \sqrt{3}$. On a donc $1 \leq u_0 \leq 2$ et $1 \leq u_1 \leq 2$.
Admettons que $1 \leq u_n \leq 2$. Alors $3 \leq u_n + 2 \leq 4$.
En remarquant que pour tout entier naturel a et b, si $a > b$ alors $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, on peut écrire :
$\sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$, c'est à dire $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2$. Comme $1 < \sqrt{3}$, on a finalement : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
Et par récurrence, on démontre ainsi que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2) On calcule u_n à 10^{-2} près pour n allant de 0 à 3 :

n	0	1	2	3
u_n	1	1,73	1,93	1,98

On observe que $u_1 > u_0$, $u_2 > u_1$ et $u_3 > u_2$ d'où l'on conjecture que (u_n) est croissante. Si tel est le cas on doit avoir $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Admettons que $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} > u_n$. Alors :
$\sqrt{u_n + 2} + 2 > u_n + 2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{u_n + 2} + 2} > \sqrt{u_n + 2}$, c'est à dire $u_{n+2} > u_{n+1}$.
Et par récurrence nous avons démontré que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc que (u_n) est croissante.

3) (u_n) est croissante et $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Cela implique que (u_n) est convergente et tend vers une limite l telle que $1 \leq l \leq 2$.
Puisque $u_3 = 1,98$, on peut préciser l'encadrement de l : $1,98 < l \leq 2$.

NB. En fait, si (u_n) tend vers une limite l, on peut considérer pour n très grand que $u_{n+1} \approx u_n \approx l$, et, pour trouver l, on peut écrire $l = \sqrt{l + 2}$, ce qui donne $l = 2$.