PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE – BAC S – AMÉRIQUE DU NORD 2008

PARTIE A

1) On remarque que, quelque soit M dans l'espace, les points A, D, I et M sont coplanaires. On peut donc traiter la question dans le plan. Rapportons le plan (ADM) à un repère orthonormal. Les points A, D, I et M ont pour coordonnées dans ce repère :

$A\ (a;b)$, $D\ (\alpha;\beta)$, $I\left(\dfrac{a+\alpha}{2};\dfrac{b+\beta}{2}\right)$ et $M\ (x;y)$. On en tire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IA}$:

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}a-x\\ b-y\end{pmatrix},\ \overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}\alpha-x\\ \beta-y\end{pmatrix},\ \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}\dfrac{a+\alpha}{2}-x\\ \dfrac{b+\beta}{2}-y\end{pmatrix},\ \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}\dfrac{a-\alpha}{2}\\ \dfrac{b-\beta}{2}\end{pmatrix}.$$

On calcule :

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=(a-x)(\alpha-x)+(b-y)(\beta-y)=a\alpha-(a+\alpha)x+x^2+b\beta-(b+\beta)y+y^2$,

$MI^2=\left(\dfrac{a+\alpha}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{b+\beta}{2}-y\right)^2=\left(\dfrac{a+\alpha}{2}\right)^2-(a+\alpha)x+x^2+\left(\dfrac{b+\beta}{2}\right)^2-(b+\beta)y+y^2$ et

$IA^2=\left(\dfrac{a-\alpha}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b-\beta}{2}\right)^2$. En remarquant que $\left(\dfrac{p+q}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p-q}{2}\right)^2=pq$, on a :

$MI^2-IA^2=a\alpha-(a+\alpha)x+x^2+b\beta-(b+\beta)y+y^2$,

c'est à dire $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$.

2) $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$ implique que (MD) et (MA) sont perpendiculaires en M et que $MI = IA$. Cela démontre que, dans le plan (ADM), M appartient à un cercle de centre I et de rayon $IA = ID = IM$. On en déduit que, dans l'espace, (E) est la sphère de centre I et de rayon IA.

PARTIE 2

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées : $A\ (3;0;0)$, $B\ (0;6;0)$, $C\ (0;0;4)$ et $D\ (-5;0;1)$.

1)

1.a) Pour que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ soit normal au plan (ABC), il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires appartenant à (ABC).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, non colinéaires, ont pour coordonnées respectives :

$\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}$. On calcule les produits scalaires $\vec{v}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}.\overrightarrow{BC}$:

$\vec{v}.\overrightarrow{AB}=-12+12+0=0$ et $\vec{v}.\overrightarrow{BC}=0-12+12=0$.

Cela démontre que le vecteur $\vec{v}$ est normal au plan (ABC).

1.b) Des coordonnées de $\vec{v}$, vecteur normal au plan (ABC), et sachant que A (3;0;0) appartient à ce plan, on en déduit l'équation du plan (ABC) : $4x+2y+3z+-12=0$.

2)

2.a) $\vec{v}$, normal au plan (ABC), est un vecteur directeur de la droite Δ. D est un point de cette droite. On obtient facilement la représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \qquad t \in \mathbf{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

2.b) Les coordonnées de H sont obtenues en résolvant l'équation :
$4(-5+4t)+2(2t)+3(1+3t)-12=0$. On obtient $t = 1$, d'où l'on déduit les coordonnées de H : $(-1;2;4)$.

2.c) $DH^2 = (-5+1)^2 + (-2)^2 + (1-4)^2 = 29$, d'où $DH = \sqrt{29}$.

2.d) Les coordonnées de $\overrightarrow{HD}$ sont $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{HA}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors :

$\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA} = -4 \times 4 + -2 \times -2 + -3 \times -4 = 0$.
Ce qui démontre que $H \in (E)$.