INTÉGRALES ENCADREMENTS – BAC S AMÉRIQUE DU NORD 2008

PARTIE A

– Si $u > 0$ sur $[a,\, b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. (1)

– Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$. (2)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,\, b]$ avec $a < b$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a,\, b]$.

Posons $F(x) = g(x) - f(x)$. Alors $F(x) \geq 0$ et, d'après (1), on peut écrire :

$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$. D'après (2), on peut écrire :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

D'où, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. CQFD.

PARTIE B

Fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

1) Sur $[0, +\infty[$, on a $e^{-x} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-x} > 1 \Rightarrow \ln(1 + e^{-x}) > \ln(1) > 0$.

Par ailleurs $f'(x) = 1 + \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ qui est strictement positive sur $[0, +\infty]$.

Donc f est positive et croissante sur $[0, +\infty[$.

2)

2.a) Quand $x \to +\infty$, alors $e^{-x} \to 0$ et $\ln(1 + e^{-x}) \to \ln 1 \to 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$.

Ce qui montre que la courbe C admet pour asymptote la droite D.

2.b) Comme $e^{-x} > 0$, alors $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$. On en conclut que C est au dessus de D.

3) Soit $I = \int_0^1 \ln(1 + e^{-x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

3.a) D'après la PARTIE A, on peut écrire $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.

I représente la valeur de l'aire délimitée par C, D et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

3.b) Soit g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \ln(1 + t) - t$.

On a $g(0) = 0$ et $g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = -\dfrac{t}{1+t} < 0$ pour tout $t > 0$.

La fonction g est donc nulle pour $t = 0$ et décroissante, donc négative, pour $t > 0$ d'où l'on déduit que :

$g(t) = \ln(1 + t) - t \leq 0$ pour $t \geq 0$, et $\ln(1 + t) \leq t$ (3) pour $t \geq 0$. CQFD.

On admet que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1+t)$ (4).

3.c) On remarque que $x \in [0,+\infty[$ implique $0 < e^{-x} \leq 1$. On peut donc remplacer t par e^{-x} dans les inégalités (3) et (4), ce qui donne :

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \leq \ln\left(1+e^{-x}\right) \leq e^{-x}.$$

3.d) En rappelant que $I = \int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right)\mathrm{d}x$, on peut écrire (d'après la PARTIE A) :

$$\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)\mathrm{d}x < I \leq \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Cherchons une primitive P de $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$. Posons $u = e^{-x}+1$. Alors $u' = -e^{-x}$ et $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = -\dfrac{u'}{u}$ d'où $P(x) = -\ln(u) = -\ln\left(e^{-x}+1\right)$. On en tire :

$$\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)\mathrm{d}x = P(1) - P(0) = -\ln\left(e^{-1}+1\right) + \ln 2 = \ln\frac{2}{1+e^{-1}}$$

D'autre part, une primitive Q de e^{-x} est $Q(x) = -e^{-x}$ d'où l'on tire :

$$\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = Q(1) - Q(0) = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1}.$$ Finalement,

$$\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}.$$ CQFD.

3.e) La calculatrice nous donne au centième près : $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) = 0{,}38$ et $1 - e^{-1} = 0{,}63$.

Un encadrement de I d'amplitude 0,4 serait : $0{,}3 \leq I \leq 0{,}7$.

4) 0,5 mm correspond à 0,025 unité sur le graphe de l'énoncé.

On recherche l'ensemble des valeurs de x telles que $f(x) - x \leq 0{,}025$, c'est à dire :

$\ln\left(1+e^{-x}\right) \leq 0{,}025$.

Résolvons l'équation $\ln\left(1+e^{-x}\right) = 0{,}025$.

On peut écrire $e^{\ln\left(1+e^{-x}\right)} = e^{0{,}025} \Rightarrow 1+e^{-x} = e^{0{,}025} \Rightarrow e^{-x} = e^{0{,}025} - 1 \Rightarrow -x = \ln\left(e^{0{,}025}-1\right)$.

Finalement $x = -\ln\left(e^{0{,}025}-1\right) = \ln\left(\dfrac{1}{e^{0{,}025}-1}\right)$. En notant que la fonction $x \mapsto \ln\left(1+e^{-x}\right)$ est décroissante sur $[0,+\infty]$, on en déduit que $f(x) - x \leq 0{,}025$ pour tout $x > \ln\left(\dfrac{1}{e^{0{,}025}-1}\right)$.

NB) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{0{,}025}-1}\right)$ est égal à 3,676 au millième près.