INTEGRALES DE WALLIS

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

PARTIE I – CALCUL DES PREMIERS TERMES

I.1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ et

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 t\, dt = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$

I.2) Soit f définie sur **R** : $f(x) = \sin x \cos^n x$ avec $n \in$ **N***.

$f'(x) = (uv)' = u'v + uv'$ avec :

$u = \sin x$ et $u' = \cos x$, et

$v = \cos^n x$ et $v' = -n \sin x \cos^{n-1} x$.

On en déduit :

$f'(x) = \cos^{n+1} x - n \sin^2 x \cos^{n-1} x$.

En remarquant que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on peut écrire :

$f'(x) = \cos^{n+1} x - n \cos^{n-1} x + n \cos^{n+1} x$, soit

$f'(x) = (n+1)\cos^{n+1} x - n \cos^{n-1} x$ pour tout $n \in$ **N***.

En intégrant cette expression sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\, dx - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\, dx.$$

Le premier terme de cette égalité est égal à

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\cos^n(0) = 0.$

Le second terme est égal à

$(n+1)I_{n+1} - nI_{n-1}$.

On en déduit que pour tout $n \in$ **N***, $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$.

Et si on applique cette formule à l'indice n de I, on obtient $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n > 1$

I.3) L'algorithme de Xavier ne fonctionne pas car il calcule I_n selon la formule $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$ au lieu de $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. On propose un algorithme modifié qui utilise une variable supplémentaire, V :

```
VARIABLES
	V, U, Uprec sont des réels
	N, I sont des entiers
DEBUT ALGORITHME
	Lire N
	Uprec prend la valeur PI/2
	Afficher Uprec
	U prend la valeur 1
	Pour I allant de 2 à N
		V prend la valeur Uprec*(I–1)/I
		Uprec prend la valeur U
		Afficher Uprec
		U prend la valeur V
	Fin Pour
FIN ALGORITHME
```

PARTIE II – ETUDE DE LA CONVERGENCE

II.1) On a $\dfrac{n-1}{n} < 1$, d'où $I_n < I_{n-2}$ pour tout $n > 1$, ce qui montre que (I_n) est décroissante.

II.2) On a $\dfrac{I_n}{I_{n-2}} = \dfrac{n-1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{I_n}{I_{n-2}}\right) = 1$, ce qui montre que (I_n) est convergente.

II.3) On constate que l'égalité $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ est vraie pour $n = 0$.

Si l'égalité $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ est vraie pour un certain entier $n \geq 0$, montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$, c'est à dire que l'on doit avoir $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = \dfrac{\pi}{2}$. Comme d'après I.1) $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$, on peut écrire :

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Et, par récurrence, l'égalité $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ est démontrée pour tout $n \geq 0$.

4) On a vu que la suite (I_n) est convergente, ce qui veut dire que ses termes I_n tendent vers une limite l quand n tend vers $+\infty$. On peut alors écrire que

$$\lim_{n\to+\infty} I_nI_{n+1} = l^2 = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\pi}{2(n+1)}\right] = 0.$$

D'où $l = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.