

INTÉGRALES – BAC S CENTRES ÉTRANGERS 2013

PARTIE A

A.1) $g(x) = 1 + e^{-x}$ définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

A.1.a) Soit $P(x)$ une primitive de $g(x)$, alors $\mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x) dx = P(a) - P(0)$.

Une primitive de $g(x)$ est $P(x) = x - e^{-x}$. Alors $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} - (0 - e^0) = a - e^{-a} + 1$

A.1.b) $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x) dx = P(1) - P(a) = 1 - e^{-1} - a + e^{-a}$

A.2) $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$ définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

A.2.a)

On a $f(0) = -2 + \frac{1}{e}$ et $f(1) = 2 - 2e^{-1} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{1}{e}$. On observe que

$2x$ et $2e^{-x}$ étant des fonctions continues pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ est continue sur \mathbb{R} et, à fortiori, sur $[0 ; 1]$. f est donc dérivable sur cet intervalle :

$f'(x) = 2 + 2e^{-x}$. Comme e^{-x} est strictement positive sur \mathbb{R} , alors f' est strictement positive sur \mathbb{R} et sur $[0 ; 1]$. On obtient le tableau de variations suivant pour f :

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-2 + \frac{1}{e}$		$2 - \frac{1}{e}$

f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$

A.2.b) On remarque que $-f(0) = f(1)$ et, compte tenu du sens de variation de f , que $f(0) < f(1)$.

Ce qui implique $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$.

On en conclut que f s'annule une seule fois sur $[0 ; 1]$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Soit $f(\alpha) = 0$. On trouve avec la calculatrice $\alpha = 0,45$ arrondie au centième.

A.3)

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ s'écrit en fonction de a :

$a - e^{-a} + 1 = 1 - a - e^{-1} + e^{-a}$ ce qui donne l'équation $2a - 2e^{-a} + \frac{1}{e} = 0$.

Le premier membre de l'équation n'est autre que $f(a)$. On doit donc résoudre $f(a) = 0$.

Comme $f(x) = 0$ n'a qu'une solution sur $[0 ; 1]$, on en déduit que $a = \alpha = 0,45$.

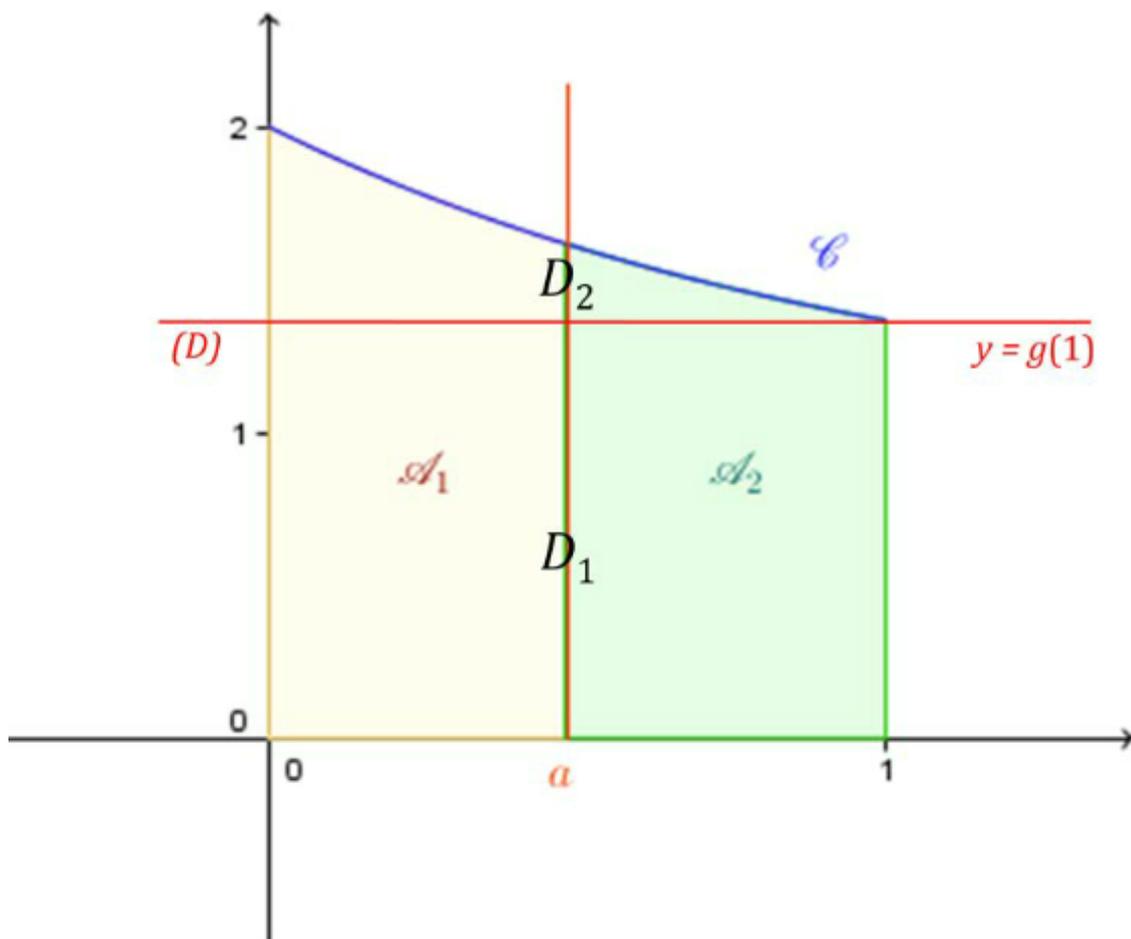
PARTIE B

Remarquons que la droite d'équation $y = b$ forme un rectangle d'aire égale à b avec l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

B.1) On note que $1 + \frac{1}{e} = 1 + e^{-1}$ est égale à $g(1)$. Représentons la droite (D) d'équation $y = 1 + e^{-1} = g(1)$ sur le graphe ci-dessous. Elle partage \mathcal{D} en deux domaines : un domaine D_1 compris entre l'axe des abscisses et la droite (D) et un domaine D_2 compris entre la droite (D) et la courbe \mathcal{C} . Il est évident d'après le graphe que $\text{Aire}D_1 > \text{Aire}D_2$, et donc

$$\text{Aire}D_1 = 1 + e^{-1} > \frac{1}{2}\text{Aire}\mathcal{D}.$$

Ce qui implique pour la droite d'équation $y = b$ qui partage \mathcal{D} en deux domaines de même aire que $b < 1 + \frac{1}{e}$.



B.2)

L'aire du domaine \mathcal{D} est égale à $P(1) - P(0) = 1 - e^{-1} + 1 = 2 - e^{-1}$ (cf. A.1.a).

Ce qui nous donne $b = \frac{2 - e^{-1}}{2}$.