ETUDE DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES – EQUATIONS/INÉQUATIONS

PARTIE A

On rappelle que la fonction sin(x) est périodique, de période 2π.

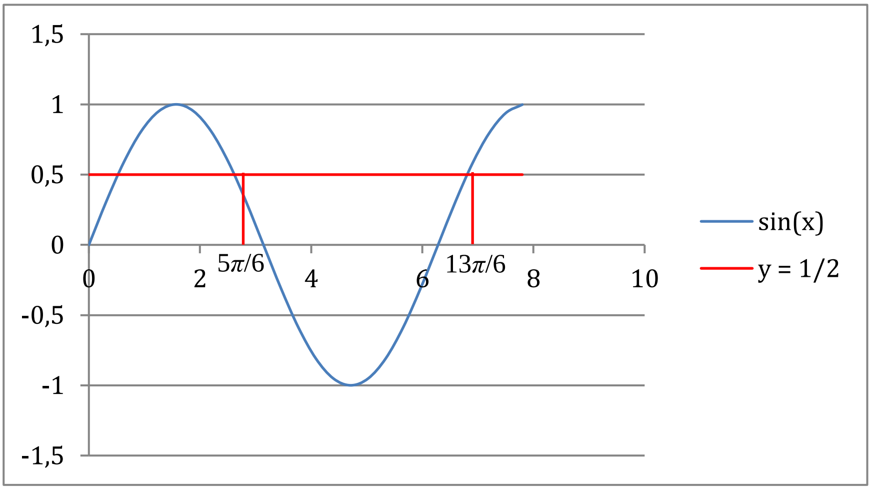
A.1) Sur l'intervalle [0 ; 2π[, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions :

$x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Dans **R**, l'ensemble des solutions pour x de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ est :

$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

A.2)



La figure ci-dessus donne la représentation graphique de sin(x) et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

Dans l'intervalle de périodicité $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$, l'inéquation $\sin(x) < \frac{1}{2}$ est vérifiée pour $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{13\pi}{6}$, ce qui donne sur **R** :

$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

PARTIE B

Soit f définie par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

B.1) En rappelant que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x)+\cos(x)]=\frac{\sqrt{2}}{2}f(x).$$

B.2) On déduit de ce qui précède que $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ revient à résoudre $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, c'est à dire

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

D'après A.1), l'ensemble des solutions de cette équation pour $x+\dfrac{\pi}{4}$ dans **R** est :

$\left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbf{Z}$.

Ce qui donne pour x :

$\left\{-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi,\ \dfrac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbf{Z}$.

B.3) En raisonnant similairement avec le résultat trouvé en A.2), on résout l'inéquation $f(x)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans **R** :

$\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi<x<\dfrac{23\pi}{12}+2k\pi$ avec $k\in\mathbf{Z}$.