ETUDE DE LA FONCTION TANGENTE

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

1) En remarquant que cos(x) = 0 pour $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on détermine l'ensemble de définition de la fonction *tangente* :

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{avec } \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) On sait que sin(x + π) = – sin(x) et cos(x + π) = – cos(x), donc :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x),$$

ce qui montre que la fonction *tangente* a une périodicité égale à π.

3) On travaille sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle, la fonction tan(x) est définie et continue, donc dérivable.

Calculons la dérivée de tan(x) :

Posons $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{u}{v}$. Alors :

$$\tan'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Puisque $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on peut aussi écrire :

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Sur I, tan'(x) est donc strictement positive.

4) En remarquant d'une part que

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} [\sin(x)] = -1 \text{ et } \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} [\cos(x)] = 0,$$

et d'autre part que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} [\sin(x)] = 1 \text{ et } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} [\cos(x)] = 0,$$

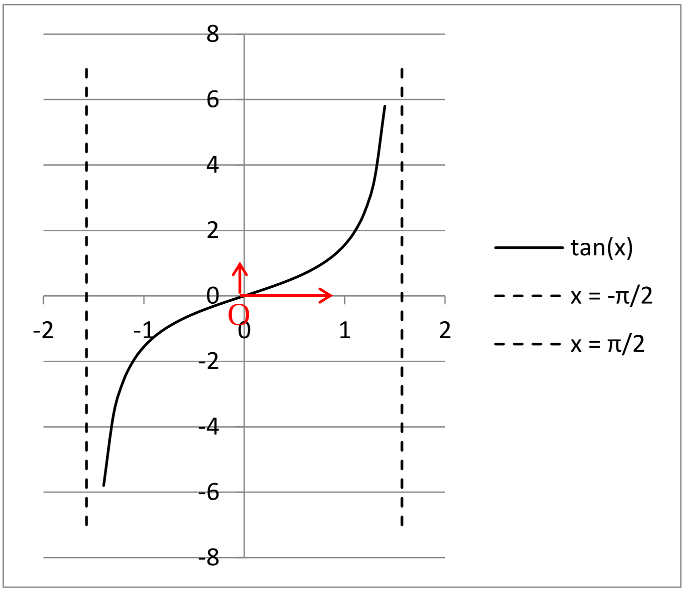
on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} [\tan(x)] = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} [\tan(x)] = +\infty.$$

On dresse le tableau de variation de tan(x) sur I :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
tan'(x)		+	
tan(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) La courbe de la fonction *tangente* sur I est représentée ci-dessous dans le repère du plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. Les droites verticales en tirets représentent les asymptotes de la courbe en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.



6) On obtient la courbe complète de la fonction *tangente sur* ***R*** *en* traçant la courbe ci-dessus sur tous les intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k \in \mathbf{Z}$, autrement dit, en transformant dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ la courbe représentée ci-dessus par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB} = k\pi\,\vec{i}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.