EXPONENTIELLE ET INTÉGRALE

1.) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)e^x$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $(1-x^2)$ tend vers $-\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$:

$f(x)=e^x-x^2e^x=e^x-(xe^{(x/2)})^2$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

Et en posant $X=\dfrac{x}{2}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} 2Xe^X=0$ (car d'après le cours $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$).

Par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$

2.a) $f(x) = uv$ avec $u=1-x^2$ et $v = e^x$. Alors $u' = -2x$, $v' = {}^{x}$ et :

$f'\left(x\right)=u'v+uv'=\left(-x^2-2x+1\right)e^x$.

2.b) Comme e^x est strictement positif sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(-x^2-2x+1)$. C'est une fonction trinôme dont le coefficient de x^2 est négatif.

En cherchant les racines de l'équation de second degré $-x^2-2x+1=0$, on trouve que $f'(x) = 0$ pour $x_1=-\sqrt{2}-1$ et $x_2=\sqrt{2}-1$.

On en déduit le signe de $f'(x)$:

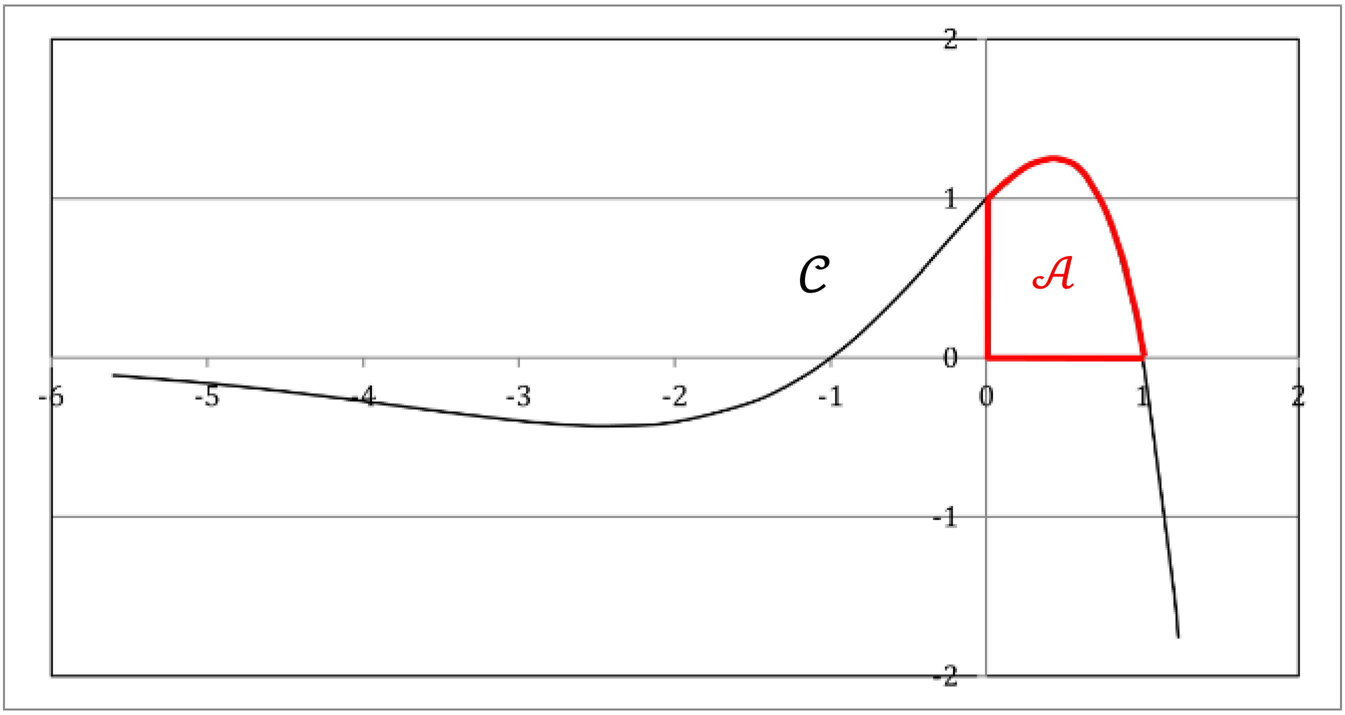
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.c) On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	$f(\sqrt{2}-1)$	$\searrow$	$-\infty$

3) La courbe représentative de f coupe l'axe des ordonnées en $f(0) = 1$.

4) Représentation graphique de la courbe $\mathcal{C}$:



5) Soient a, b et c trois réels et la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

5.a)) $F(x) = uv$ avec $u = ax^2+bx+c$ et $v = e^x$. Alors $u' = 2ax + b$, $v' = e^x$ et :
$F'(x)=u'v+uv'=\left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]e^x$.

5.b) $F'(x) = f'(x)$ implique $a = -1$, $2a + b = 0$ et $b + c = 1$.
Ce qui donne : $a = -1$, $b = 2$ et $c = -1$.
Alors $F(x)=(-x^2+2x-1)e^x$.

6) De ce qui précède on conclut que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Alors, $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-F(0)=1$.

7) Graphiquement, $\mathcal{A}$ est l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (délimitée en rouge sur la figure ci-dessus).