# [BAC] ETUDE D'UNE FONCTION AVEC LOGARITHME (2)

On désigne par $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1) On remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right] = \ln(1) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Pour tout réel de $I$, on a

$f'(x) = \left(\dfrac{1}{u}\right)' + [\ln(v)]' = -\dfrac{u'}{u^2} + \dfrac{v'}{v}$ avec

$u = x + 1$ et $u' = 1$ d'où $-\dfrac{u'}{u^2} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et

$v = \dfrac{x}{x+1}$ et $v' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ d'où $\dfrac{v'}{v} = \left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{1}{x(x+1)}$. Donc

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Ceci montre que $f'(x)$ a le même signe que $x$, c'est à dire que $f'$ est strictement positive sur $I$.

En remarquant que $f(1) = \dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln(2) = -0{,}193$ à $10^{-3}$ près, on peut dresser le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-0{,}193$ | $\nearrow$ | $0$ |

3) On en déduit que $f(x) < 0$ sur $I$.