Solution de l'énigme du mois : Une question d'ordre

Soit I l'ensemble des entiers allant de 1 à 16 inclus: I = {1;2;3;4;5;...;15;16}.

La consigne est la suivante : « Ordonnez les entiers compris entre 1 (inclus) et 16 (inclus) de telle sorte que la somme de deux termes consécutifs soit toujours un carré parfait. »
De plus chacun des seize nombres doit être utilisé une fois et une seule.

On rappel le que : $1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$

En faisant la somme de deux entiers consécutifs dans l'ensemble I, le plus grand résultat possible est : 15 + 16 = 31.
On en déduit que toutes les sommes possibles seront inférieures à 31 donc à 6^2 ($x < 31 < 6^2$).

Dans l'ensemble I toutes les sommes, deux à deux possibles, dont les résultats est le carré d'un nombre entier sont les suivantes :

$\{16 + 9 = 25 = 5^2$

$\begin{cases} 15 + 1 = 16 = 4^2 \\ 15 + 10 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 14 + 2 = 16 = 4^2 \\ 14 + 11 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 13 + 3 = 16 = 4^2 \\ 13 + 12 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 12 + 4 = 16 = 4^2 \\ 12 + 13 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 11 + 5 = 16 = 4^2 \\ 11 + 14 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 10 + 6 = 16 = 4^2 \\ 10 + 15 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 9 + 7 = 16 = 4^2 \\ 9 + 16 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 8 + 1 = 9 = 3^2 \\ 8 + 8 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 7 + 2 = 9 = 3^2 \\ 7 + 9 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 6 + 3 = 9 = 3^2 \\ 6 + 10 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5 + 4 = 9 = 3^2 \\ 5 + 11 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 + 5 = 9 = 3^2 \\ 4 + 12 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 + 1 = 4 = 2^2 \\ 3 + 6 = 9 = 3^2 \\ 3 + 13 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 + 2 = 4 = 2^2 \\ 2 + 7 = 9 = 3^2 \\ 2 + 14 = 16 = 4^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + 3 = 4 + 2^2 \\ 1 + 8 = 9 = 3^2 \\ 1 + 15 = 16 = 4^2 \end{cases}$

Les lignes : $8 + 8 = 16 = 4^2$ et $2 + 2 = 4 = 2^2$, sont impossibles car chacun des seize nombres doit être utilisé une fois.

Le nombre 16 ne peut former un carré qu'en l'additionnant avec le chiffre 9. Il y a donc une seule possibilité pour 16, ce sera donc notre point de départ.

Les deux premiers nombres sont donc dans l'ordre suivant : 16 ; 9 …
On regarde dans les additions si dessus quel nombre peut aller après 9 pour obtenir un le carré d'un nombre après addition. On trouve soit 16 soit 7 or 16 est déjà utilisé, le chiffre suivant sera donc 7.
Après 7, on regarde dans nos additions ce qui peut aller avec 7, on trouve soit 9 soit 2. Le chiffre 9 étant déjà utilisé, après 7 il s'agit du chiffre 2.

On a alors le début de notre ensemble : { 16; 9; 7; 2;...}

On procède de même pour les termes suivants, on obtient alors :
{16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 3;...}

Au chiffre 3 on a alors deux possibilités : $3 + 6 = 9 = 3^2$ ou $3 + 1 = 4 = 2^2$.
En partant de $3 + 1 = 4 = 2^2$, et en reprenant le principe précédent on obtient l'ensemble : {16 ; 9; 7; 2; 14 ; 11; 5; 4; 12; 13; 3; 1; 15; 10; 6}.
Il manquerait le chiffre 8 dans cet ensemble et on ne pourrait le placer de telle sorte que la somme du nombre précédent, ou du nombre suivant, donne le carré d'un entier.

<u>remarque</u> : En 1, il y a aussi deux possibilités cependant si à la place du 15 on avait mis 8, comme 8 ne peut faire un seul carré par addition l'ensemble se serait directement arrêté. Il manquerait donc plusieurs nombres.

Ainsi en 3, on choisi la deuxième possibilité ($3 + 6 = 9 = 3^2$).
En utilisant la méthode précédente de déduction grâce aux additions faites précédemment, on trouve l'ensemble demandé :

{16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 3; 6; 10; 15; 1; 8}

.

En additionnant deux termes consécutifs on obtient toujours le carré d'un nombre entier, et chaque nombre de l'ensemble I n'est utilisé qu'une seul fois.

Question bonus :

D'après la méthode utilisée pour trouver notre ensemble, on montre qu'il y a unicité. Cependant l'addition est commutative (c'est-à-dire que l'on peut additionner deux nombres dans l'ordre qu'on veut : a + b = b + a).

Il y a donc au total seulement deux résultats possibles qui sont :

$$\boxed{\{16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 3; 6; 10; 15; 1; 8\}}$$

et $$\boxed{\{8; 1; 15; 10; 6; 3; 13; 12; 4; 5; 11; 14; 2; 7; 9; 16\}}$$.