ANGLES ORIENTÉS DANS UN PENTAGONE

Puisque *ABCDE* est un pentagone régulier, ses sommets partagent le cercle circonscrit en cinq arcs égaux. Les angles au centre qui interceptent ces arcs sont donc tous égaux à $\frac{2\pi}{5}$. Ainsi

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right)=\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{2\pi}{5}+2k\pi$, avec $k\in\mathbf{Z}$.

On calcule de même facilement que l'angle que fait un rayon du cercle circonscrit passant par un sommet du pentagone avec un côté du pentagone adjacent à ce sommet est

$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$. Par exemple $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right)=\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3\pi}{10}+2k\pi$, avec $k\in\mathbf{Z}$.

1) On cherche des mesures principales d'angles, donc comprises entre $-\pi$ et π.

$\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)=\left(-\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)=\pi-\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$.

$\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3\pi}{10}$.

$\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$.

2) Le triangle *OEC* étant isocèle en *O*, *O* se trouve sur la médiatrice du segment [*EC*]. Le triangle *DEC* étant isocèle en *D*, *D* se trouve aussi sur la médiatrice du segment [*EC*]. On en déduit que la droite (*DO*) est la médiatrice du segment [*EC*]. Donc les droites *(DO)* et *(EC)* sont perpendiculaires.

3)

3.a) On a démontré en 1) que la droite (*DO*) est perpendiculaire au segment [*AB*] et en 2) qu'elle est perpendiculaire au segment [*EC*]. On en conclut que (*EC*) et (*AB*) sont parallèles.
Soit *M* le milieu de [*AB*] et *M'* le milieu de [*EC*]. Le triangle *OAB* est isocèle en *O*, donc *O* est sur la médiatrice de [*AB*]. *O* étant aussi sur la médiatrice (*DO*) de [*EC*], on en conclut que les points *D*, *M'*, *O* et *M* sont alignés.
Comme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OM'}$, on en déduit que ces deux vecteurs sont colinéaires à $\overrightarrow{OD}$.

3.b) Le vecteur $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)+\overrightarrow{OD}$ étant la somme de trois vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{OD}$, il est lui-même colinéaire à $\overrightarrow{OD}$.

4) On démontre de manière analogue que (*EO*) est la médiatrice de [*AD*] et [*BC*], et il en découle que les vecteurs $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OE}$.

5) Le fait que le vecteur $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ soit colinéaire à deux vecteurs non colinéaires, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$, implique que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.