FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES

DÉFINITION

Une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à 0 est **paire** si et seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$f(-x) = f(x)$$

PROPRIÉTÉ

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

DÉFINITION

Une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à 0 est **impaire** si et seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$f(-x) = -f(x)$$

PROPRIÉTÉ

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

MÉTHODE

Préalable : On vérifie que l'ensemble de définition de la fonction est symétrique par rapport à 0.

C'est le cas, en particulier, pour les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et les intervalles du type $[-a;a]$ et $]-a;a[$. Si l'ensemble de définition n'est **pas** symétrique par rapport à 0, **la fonction n'est ni paire ni impaire**.

1. Pour montrer qu'une fonction f **est paire** :
   - On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$.
   - On montre que $f(-x) = f(x)$
2. Pour montrer qu'une fonction f **est impaire** :
   - On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$.
   - On calcule $-f(x)$
   - On montre que $f(-x) = -f(x)$
3. Pour montrer qu'une fonction f **n'est pas paire** :
   Il suffit d'un contre-exemple c'est à dire qu'il suffit de trouver un nombre a tel que $f(-a) \neq f(a)$
4. Pour montrer qu'une fonction f **n'est pas impaire** :
   Il suffit d'un contre-exemple c'est à dire qu'il suffit de trouver un nombre a tel que $f(-a) \neq -f(a)$

REMARQUES

1. Si l'énoncé ne précise pas s'il faut montrer que f est paire ou s'il faut montrer que f est impaire, il peut s'avérer utile de tracer la courbe représentative de f à la calculatrice.
   si la courbe est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**, la fonction est **paire**.
   si la courbe est **symétrique** par rapport à l'**origine**, la fonction est **impaire**.
2. Une fonction peut n'être ni paire, ni impaire (c'est même le cas général!)
3. Seule la fonction nulle $(x \mapsto 0)$ est à la fois paire et impaire.

EXEMPLE 1

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1+x^2}{x^2}$ est paire.

Pour tout réel non nul x :

$$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{(-x)^2}$$

Or $(-x)^2 = x^2$ donc

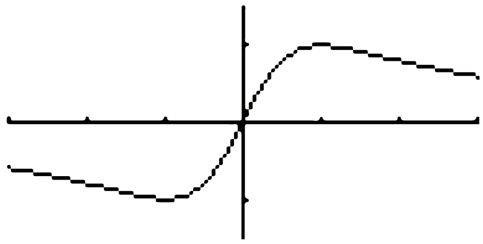
$$f(-x) = \frac{1+x^2}{x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(-x) = f(x)$ donc la fonction f est **paire**.

EXEMPLE 2

Etudier la parité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$

La courbe de la fonction f donnée par la calculatrice semble symétrique par rapport à l'origine du repère.



On va donc montrer que f est impaire.

Pour tout réel x :

$f(-x) = \dfrac{2 \times (-x)}{1 + (-x)^2}$

Or $(-x)^2 = x^2$ donc

$f(-x) = \dfrac{-2x}{1 + x^2}$

Par ailleurs :

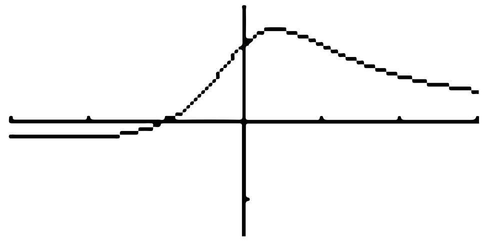
$-f(x) = -\dfrac{2x}{1 + x^2}$

Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ donc la fonction f est **impaire**.

EXEMPLE 3

Etudier la parité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1 + x}{1 + x^2}$

La courbe de la fonction f donnée par la calculatrice ne présente aucune symétrie.



On va donc montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $f(1)$ et $f(-1)$

$f(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f(-1) = \dfrac{0}{2} = 0$

On a donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$

Donc f n'est **ni paire ni impaire**.