THÉORÈME DE PYTHAGORE -TRIGONOMÉTRIE

1. THÉORÈME DE PYTHAGORE (RAPPELS DE 4ÈME)

THÉORÈME DE PYTHAGORE

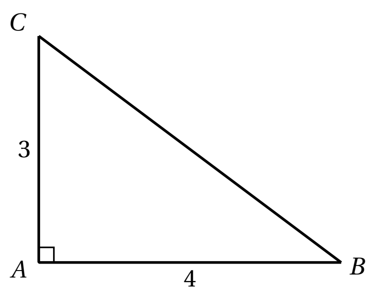
Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

REMARQUE

- On rappelle que l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit et le côté ayant la plus grande longueur.
- Ce théorème sert à calculer la longueur d'un côté connaissant les longueurs des deux autres lorsque l'on **sait** que le triangle est rectangle

EXEMPLE

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$cm et $AC = 3$cm



D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

Donc $BC = \sqrt{25} = 5$cm.

THÉORÈME (RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE)

Un triangle est rectangle si et seulement si le carré de la longueur du plus grand coté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

REMARQUES

Ce théorème sert à **démontrer** qu'un triangle est un triangle rectangle lorsqu'on connait les longueurs de ses trois côtés.

EXEMPLE

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$cm, $AC = 5$cm et $BC = 13$cm.

ABC est-il rectangle ?

On calcule séparément BC^2 (carré de la longueur du plus grand coté) et $AB^2 + AC^2$ (somme des carrés des longueurs des deux autres cotés) :

$BC^2 = 13^2 = 169$

$AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

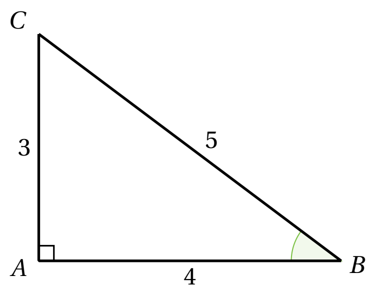
2. TRIGONOMÉTRIE

DÉFINITIONS

Soit ABC un triangle rectangle en A :

- le **sinus** de $\widehat{ABC}$ est le nombre :
  $\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à B}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- le **cosinus** de $\widehat{ABC}$ est le nombre :
  $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent à B}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- la **tangente** de $\widehat{ABC}$ est le nombre :
  $\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à B}}{\text{longueur du côté adjacent à B}}$

EXEMPLE



Dans le triangle rectangle ABC ci-dessus :

- $\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{5} = 0,6$
- $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5} = 0,8$
- $\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

REMARQUES

- Les sinus, cosinus et tangente n'ont pas d'unité!
- Les sinus et cosinus d'un angle aigu sont compris entre 0 et 1. Par contre, la tangente peut être supérieure à 1.
- Connaissant le sinus, il est possible de calculer la mesure de l'angle en degré à la calculatrice à l'aide de la touche $\sin^{-1}$ (ou **Arcsin** ou **asin** suivant le modèle de la calculatrice). Vérifiez bien que la calculatrice est en mode **degré**!

PROPRIÉTÉS

Pour tout angle aigu $\widehat{a}$ d'un triangle rectangle :

$$(\cos\widehat{a})^2 + (\sin\widehat{a})^2 = 1$$

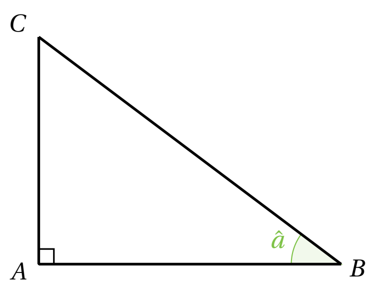
$$\tan\widehat{a} = \frac{\sin\widehat{a}}{\cos\widehat{a}}$$

REMARQUE

Pour simplifier les notations, on écrit en général $\cos^2\widehat{a}$ pour $(\cos\widehat{a})^2$. La première formule s'écrit alors :

$\cos^2\widehat{a} + \sin^2\widehat{a} = 1$

DÉMONSTRATIONS



- $\cos\widehat{a} = \dfrac{AB}{BC}$ donc $(\cos\widehat{a})^2 = \dfrac{AB^2}{BC^2}$

  $\sin\widehat{a} = \dfrac{AC}{BC}$ donc $(\sin\widehat{a})^2 = \dfrac{AC^2}{BC^2}$

  Par conséquent :

  $(\cos\widehat{a})^2 + (\sin\widehat{a})^2 = \dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

  Or d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc :

  $(\cos\widehat{a})^2 + (\sin\widehat{a})^2 = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$ après simplification par BC^2
- $\dfrac{\sin\widehat{a}}{\cos\widehat{a}} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{AC}{BC} \times \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{AB}$ après simplification par BC.

  Or, $\dfrac{AC}{AB} = \tan\widehat{a}$, par conséquent :

$$\tan \widehat{a} = \frac{\sin \widehat{a}}{\cos \widehat{a}}.$$

EXEMPLE

On sait que le cosinus d'un angle $\widehat{a}$ vaut $0,5$. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} du sinus puis de la tangente de cet angle.

$\cos^2 \widehat{a} + \sin^2 \widehat{a} = 1$

$\sin^2 \widehat{a} = 1 - \cos^2 \widehat{a} = 1 - 0,5^2 = 0,75$

$\sin \widehat{a} = \sqrt{0,75} \approx 0,87$ à 10^{-2} près

$\tan \widehat{a} = \dfrac{\sin \widehat{a}}{\cos \widehat{a}} = \dfrac{\sqrt{0,75}}{0,5} \approx 1,73$ à 10^{-2} près.