PRODUIT SCALAIRE

1. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

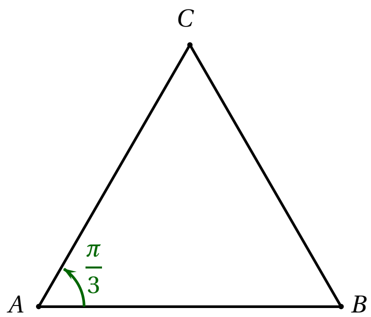
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

REMARQUES

- **Attention :** le produit scalaire est un nombre réel et non un vecteur !
- On rappelle que $||\overrightarrow{AB}||$ (norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) désigne la longueur du segment AB.
- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini ; on considèrera alors que le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ vaut 0
- Le cosinus d'un angle étant égal au cosinus de l'angle opposé : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$. Par conséquent $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

EXEMPLE



ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 1 unité.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

DÉMONSTRATION

Si l'un des vecteurs est nul le produit scalaire est nul et la propriété est vraie puisque, par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Si les deux vecteurs sont non nuls, leurs normes sont non nulles donc :

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est le réel positif ou nul :

$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$

DÉMONSTRATION

Le cosinus d'un angle nul vaut 1 donc $\cos(\vec{u}, \vec{u}) = 1$. Par conséquent :

$\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}) = ||\vec{u}||^2$

THÉORÈME

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

DÉMONSTRATION

$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2 = ||\vec{u}||^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + ||\vec{v}||^2$

Par conséquent :

$||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 2(\vec{u}.\vec{v})$

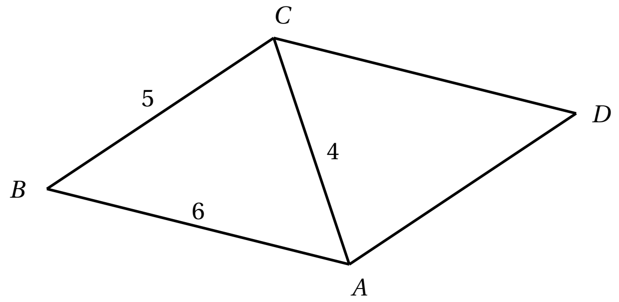
et l'on obtient l'égalité souhaitée en divisant chaque membre par 2.

REMARQUE

De la même manière, en développant $(\vec{u} - \vec{v})^2$ on obtient :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$$

EXEMPLE



$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=6$, $AC=4$ et $BC=5$.
On souhaite calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}||^2-||\overrightarrow{AB}||^2-||\overrightarrow{AD}||^2\right)$$

Or $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles. Par conséquent :

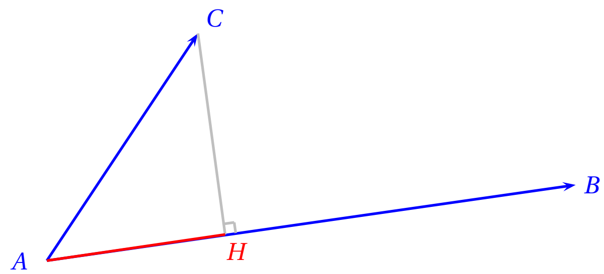
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}&=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AC}||^2-||\overrightarrow{AB}||^2-||\overrightarrow{AD}||^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2-AD^2\right)\\&=\frac{1}{2}(16-36-25)=-\frac{45}{2}\end{aligned}$$

THÉORÈME

Soient A, B, C trois points du plan et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB)

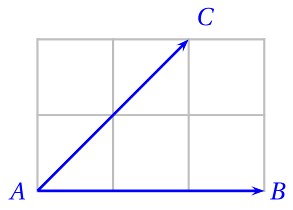
Alors :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus



Ici : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$

EXEMPLE



Sur la figure ci-dessus où l'unité est le carreau, le point C se projette orthogonalement sur la droite (AB) en un point H (non représenté) tel que $AH = 2$.

Par conséquent, l'angle $\widehat{BAC}$ étant aigu :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3 \times 2 = 6$

THÉORÈME

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, soient $\vec{u}\,(x; y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ deux vecteurs du plan ; alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

DÉMONSTRATION

Dire que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. De même $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right).\left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right) = xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + x'y\vec{i}.\vec{j} + yy'\vec{j}^2$

Or, comme le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé, $\vec{i}^2 = ||\vec{i}||^2 = 1$, $\vec{j}^2 = ||\vec{j}||^2 = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$. Par conséquent :

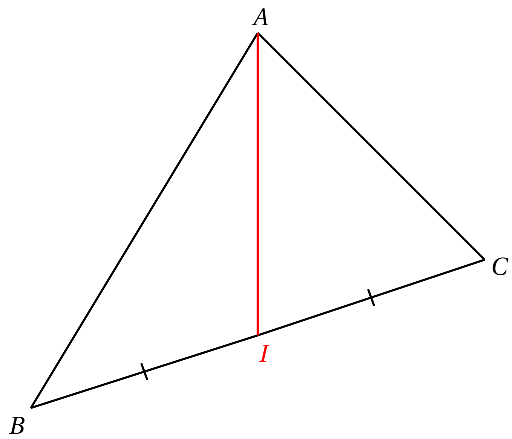
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

2. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

THÉORÈME (DE LA MÉDIANE)

Soient ABC un triangle quelconque et I le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$



Médiane dans un triangle

REMARQUE

La démonstration est laissée en exercice : Exercice théorème de la médiane

PROPRIÉTÉ (FORMULE D'AL KASHI)

Soit ABC un triangle quelconque :

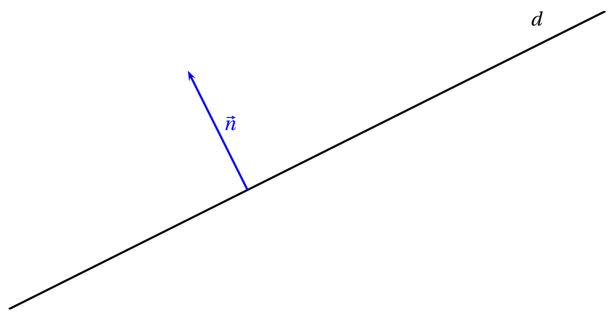
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

REMARQUE

- La démonstration est faite en exercice : Exercice formule d'Al Kashi
- Si le triangle ABC est rectangle en A alors $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$. On retrouve alors le théorème de Pythagore.

DÉFINITION (VECTEUR NORMAL À UNE DROITE)

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est **normal** à la droite d si et seulement si il est orthogonal à un vecteur directeur de d.



Vecteur $\vec{n}$ normal à la droite d

THÉORÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

La droite d de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+c=0$$

où a, b sont les coordonnées de $\vec{n}$ et c un nombre réel.

Réciproquement, l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ tels que $ax+by+c=0$ (a,b,c étant des réels avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$) est une droite dont un vecteur normal est $\vec{n}\,(a;b)$.

REMARQUE

La démonstration est laissée en exercice : Exercice vecteur normal à une droite

THÉORÈME (ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN CERCLE)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $I\left(x_I;y_I\right)$ un point quelconque du plan et r un réel positif.

Une équation du cercle de centre I et de rayon r est :

$$(x-x_I)^2+\left(y-y_I\right)^2=r^2$$

DÉMONSTRATION

Le point $M\left(x;y\right)$ appartient au cercle si et seulement si $IM=r$. Comme IM et r sont positif cela équivaut à $IM^2=r^2$. Or $IM^2=(x-x_I)^2+\left(y-y_I\right)^2$; on obtient donc le résultat souhaité.

EXEMPLE

Le cercle de centre $\Omega\,(3;4)$ et de rayon 5 a pour équation :

$(x-3)^2+\left(y-4\right)^2=25$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$

$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$

Ce cercle passe par O car on obtient une égalité juste en remplaçant x et y par 0.

Une autre utilisation du produit scalaire est la démonstration des formules d'addition des sinus et cosinus (voir exercice soustraction des cosinus)