POLYNÔMES ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

1. POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

DÉFINITION

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

EXEMPLES

- $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ est un polynôme du second degré.
- $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme du second degré avec $b = 0$ mais $Q(x) = x - 1$ n'en est pas un car a n'est pas différent de zéro : c'est un polynôme du premier degré (ou une fonction affine)
- $P(x) = 5(x-1)(3-2x)$ est un polynôme du second degré car en développant on obtient une expression du type souhaité.

THÉORÈME ET DÉFINITION

Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P.

EXEMPLE

Soit $P(x) = 2x^2 + 4x + 5$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 2} = -1$$

$$\beta = P(\alpha) = P(-1) = 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 5 = 2 - 4 + 5 = 3$$

La forme canonique de $P(x)$ est donc :

$$P(x) = 2(x+1)^2 + 3$$

2. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

DÉFINITION

On appelle **racine** d'un polynôme $P(x)$ une solution de l'équation $P(x) = 0$

REMARQUE

Ne pas confondre les mots *"racine"* et *"racine carrée"*!

DÉFINITION

On appelle **discriminant** du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

THÉORÈME

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet **deux racines distinctes** : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet **une racine unique** : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'admet **aucune racine** réelle.

EXEMPLES

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$
  $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$
  P_1 possède 2 racines :
  $x_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1$
- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$
  $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
  P_2 possède une seule racine :
  $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$
- $P_3(x) = x^2 + x + 1$
  $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$
  P_3 ne possède aucune racine.

3. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

THÉORÈME

Soit P(x) un trinôme du second degré de discriminant Δ.

- **Si** $\Delta > 0$ **:** $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines (c'est à dire si $x < x_1$ ou $x > x_2$) et du signe opposé entre les racines (si $x_1 < x < x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- **Si** $\Delta = 0$ **:** $P(x)$ est toujours du signe de a sauf en x_0 (où il s'annule).

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- **Si** $\Delta < 0$ **:** $P(x)$ est toujours du signe de a.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

EXEMPLES

Si l'on reprend les exemples précédents :

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$:
  $\Delta > 0$ et $a < 0$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$:
  $\Delta = 0$ et $a > 0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	

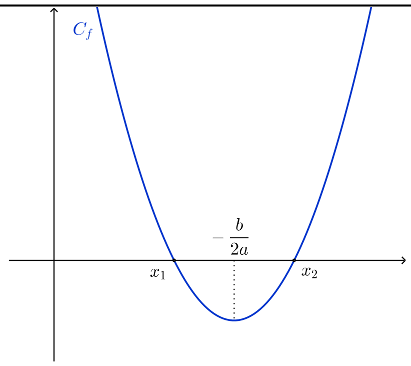
- $P_3(x) = x^2 + x + 1$:
  $\Delta < 0$ et $a > 0$.

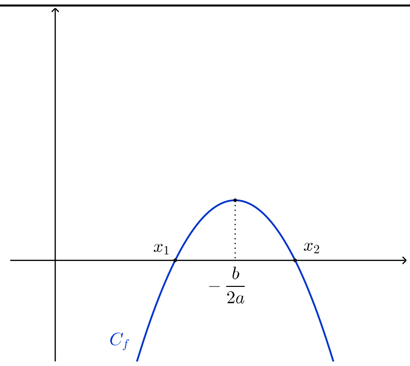
x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	

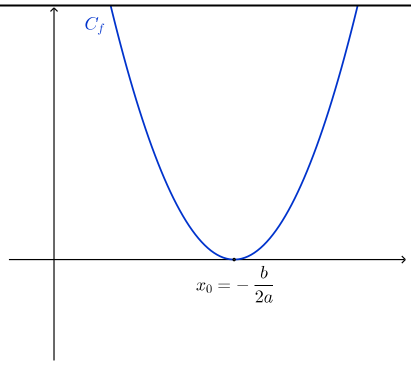
4. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

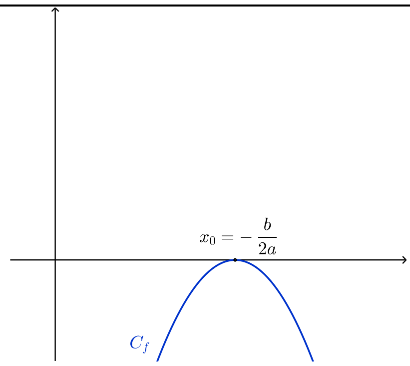
On rappelle que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des **points d'intersection de la courbe** C_f et de l'**axe des abscisses**.

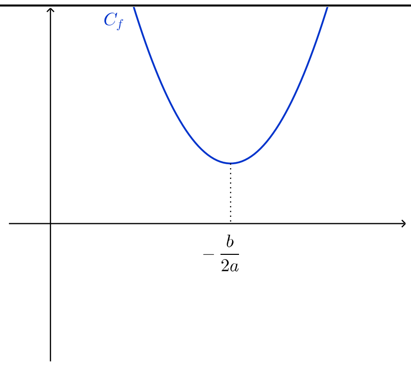
En regroupant les propriétés de ce chapitre et celles vues en Seconde on peut résumer ces résultats dans le tableau :

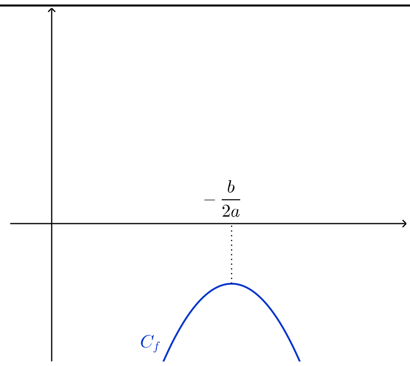
<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>

2 racines : x_1 et x_2</td><td>

2 racines : x_1 et x_2</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>

1 racine : x_0</td><td>

1 racine : x_0</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>

Pas de racine</td><td>

Pas de racine</td></tr>
</table>