LIMITES D'UNE FONCTION

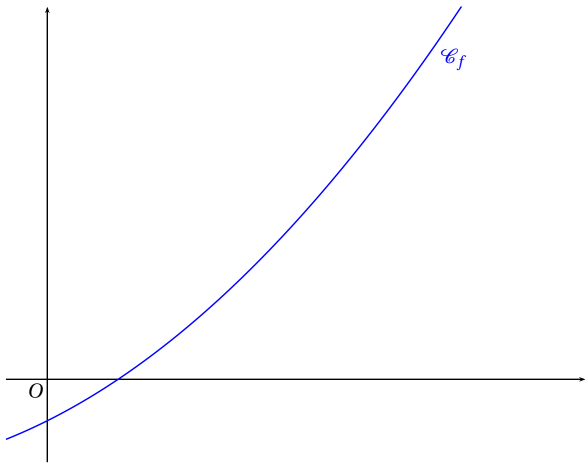
1. DÉFINITIONS

DÉFINITION

Limite infinie quand x tend vers l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$.

On dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

REMARQUE

On définit de façon similaire les limites :

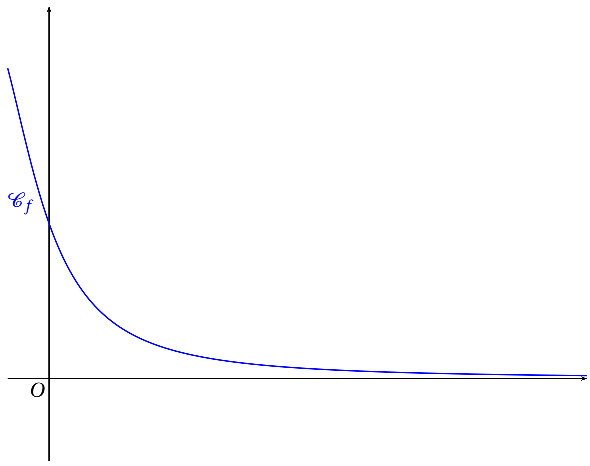
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

DÉFINITION

Limite finie quand x tend vers l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$.

On dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

REMARQUE

On définit de façon similaire la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

DÉFINITION

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f.

EXEMPLE

Sur la courbe ci-dessus, la droite d'équation $y = 0$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.

DÉFINITION

Limite infinie quand x tend vers un réel.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$ (avec $a < b$).

On dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x se rapproche de a en restant supérieur à a. On écrit alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$.

De même, on dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b par valeurs inférieures lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x se rapproche de b en restant inférieur à b. On écrit alors $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x) = +\infty$.

Enfin, si $c \in]a; b[$, on dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers c si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers c par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. On écrit alors $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$.

REMARQUE

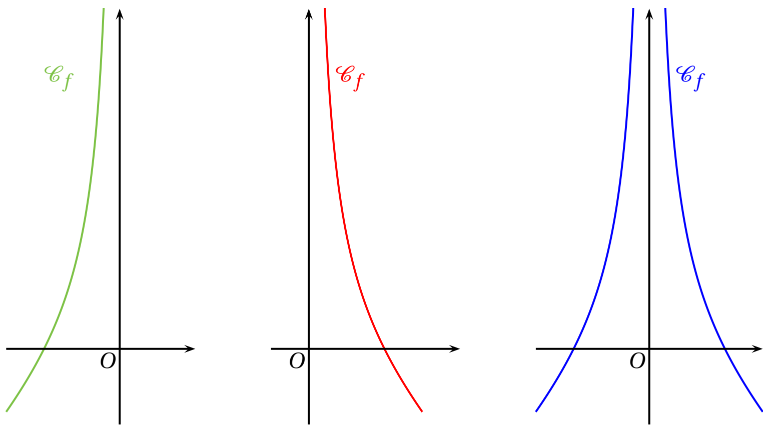
On définit de façon symétrique $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ en remplaçant « $f(x)$ *est aussi grand que l'on veut* » par « $f(x)$ *est aussi petit que l'on veut* » dans la définition.

DÉFINITION

Si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = c$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

EXEMPLE

Sur les trois courbes de la figure ci-dessous, la droite d'équation $x = 0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

DÉFINITION

Limite finie quand x tend vers un réel.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$).

On dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a par valeurs supérieures lorsque $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de a en restant supérieur à a.

On écrit alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$.

De même, on dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers b par valeurs inférieures lorsque $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de b en restant inférieur à b.

On écrit alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = l$.

Enfin, si $c \in]a;b[$, on dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers c si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers c par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

On écrit alors $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$.

2. LIMITES USUELLES

PROPRIÉTÉS

Pour tout entier $n > 1$:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si n est impair} \\ +\infty \text{ si n est pair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

3. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

PROPRIÉTÉS

Limite d'une somme.

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

$F.I.$ signifie forme indéterminée.

REMARQUE

« *Forme indéterminée* » ne signifie **pas** que la limite n'existe pas mais que les formules d'opérations sur les limites ne permettent pas de trouver directement limite. Pour la calculer, il faut alors « *lever l'indétermination* » par exemple en simplifiant une fraction (cf. *fiches méthodes*).

PROPRIÉTÉS

Limite d'un produit.

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$
l	l'	$l \times l'$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$(signe)\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$(signe)\infty$
0	$\pm\infty$	$F.I.$

- $F.I.$ signifie forme indéterminée.
- $\pm\infty$ signifie que la formule s'applique pour $+\infty$ et pour $-\infty$.
- $(signe)\infty$ signifie que l'on utilise la règle des signes usuelle :
  $+ \times + = +$
  $+ \times - = -$
  $- \times - = +$
  pour déterminer si la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

PROPRIÉTÉS

Limite d'un quotient.

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
l	$l' \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$
$l \neq 0$	0	$(signe)\infty$
0	0	$F.I.$
l	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	l	$(signe)\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I.$

PROPRIÉTÉ

Limite d'une fonction composée.

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors :

$\lim\limits_{x\to a} g\left(f(x)\right) = c$.

REMARQUE

On pose souvent $X = f(x)$ («changement de variable») et on écrit alors :

$\lim\limits_{x\to a} X = \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

$\lim\limits_{x\to a} g\left(f(x)\right) = \lim\limits_{X\to b} g(X) = c$.

EXEMPLE

On cherche à calculer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2}.$

On pose $X = 1+x^2$. Alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty} X = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$

et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty.$

4. THÉORÈMES DE COMPARAISON

THÉORÈMES

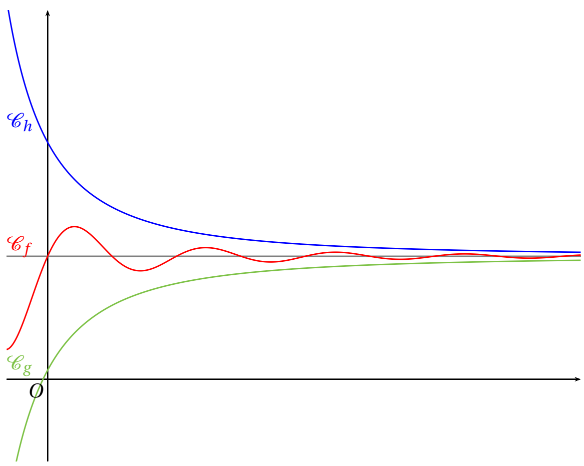
- Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

THÉORÈME

Théorème des "gendarmes".

Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l.$



Théorème des gendarmes

REMARQUE

On a des théorèmes similaires lorsque $x \to -\infty$.