ENSEMBLES DE NOMBRES - INTERVALLES - VALEURS ABSOLUES

I - LES ENSEMBLES DE NOMBRES

DÉFINITION

$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5;\cdots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

REMARQUE

On emploie le signe $\in$ pour indiquer qu'un nombre appartient à un ensemble. On écrira par exemple : $2 \in \mathbb{N}$ et $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

DÉFINITION

$\mathbb{Z} = \{\cdots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\cdots\}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.

DÉFINITION

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. Les nombres décimaux peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (1 ; 10 ; 100 ; 1 000 ; ...). Ils peuvent aussi s'écrire sous forme décimale dont le nombre de chiffres après la virgule est finie.

REMARQUES

- *"fini"* signifie ici "qui n'est pas infinie".
- Les calculatrices les plus simples ne manipulent que des nombres décimaux pour effectuer les calculs. Certaines permettent des opérations sur les fractions. Quelques modèles plus avancés (effectuant du "calcul formel") peuvent également effectuer des calculs avec des nombres irrationnels.

DÉFINITION

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers relatifs.

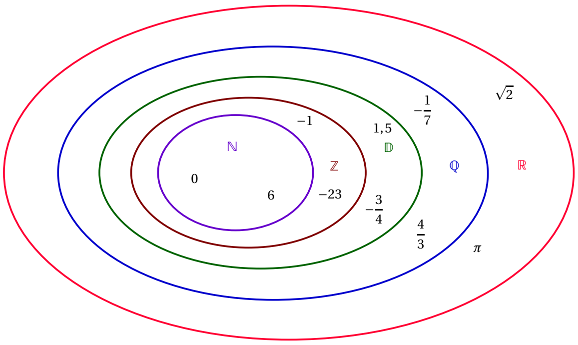
DÉFINITION

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**. Les nombres réels sont tous les nombres connus (en Seconde...).

REMARQUE

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels (comme π ou $\sqrt{2}$) sont appelés des nombres **irrationnels**.

> PROPRIÉTÉ
>
> $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



REMARQUES

- Le symbole $\subset$ se lit *"inclus dans"*.
- La proposition précédente signifie que tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont eux-même des nombres décimaux qui sont des nombres rationnels qui sont des nombres réels.
- Un même nombre admet plusieurs écritures différentes. Par exemple le nombre 2 peut aussi s'écrire 2,0 (écriture décimale) $\frac{2}{1}$ ou $\frac{4}{2}$ etc. (écriture fractionnaire) $\sqrt{4}$ (écriture avec un radical) et même (aussi curieux que cela puisse vous paraitre) 1,999999.... (écriture décimale illimitée).

II - INTERVALLES

Intervalles bornés

> DÉFINITION
>
> Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
>
> - L'intervalle **fermé** $[a\,;\,b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
> - L'intervalle **ouvert** $]a\,;\,b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.
> - L'intervalle $[a\,;\,b[$ (fermé en a, ouvert en b) est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x < b$.
> - L'intervalle $]a\,;\,b]$ (ouvert en a, fermé en b) est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$.

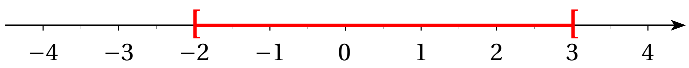
EXEMPLE

Par exemple, l'intervalle $[-2\ ;\ 3[$ est constitué des nombres réels qui sont à la fois supérieur ou égal à -2 et strictement inférieur à 3.

On pourra, par exemple, écrire :

- $-3 \notin [-2\ ;\ 3[$
- $-2 \in [-2\ ;\ 3[$
- $0 \in [-2\ ;\ 3[$
- $3 \notin [-2\ ;\ 3[$
- $4 \notin [-2\ ;\ 3[$

On peut représenter l'intervalle $[-2\ ;\ 3[$ de la façon suivante :



Intervalles non bornés

DÉFINITION

Soit a un nombre réel.

- L'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.
- L'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty\ ;\ a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant a$.
- L'intervalle $]-\infty\ ;\ a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.

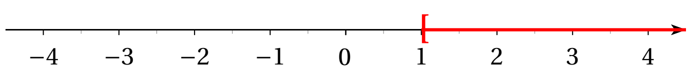
REMARQUE

En $+\infty$ et en $-\infty$, le crochet est toujours **ouvert**.

EXEMPLE

- $0 \notin [1\ ;\ +\infty[$
- $1 \in [1\ ;\ +\infty[$
- $100 \in [1\ ;\ +\infty[$

On représente l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ ainsi :



Union et intersection

DÉFINITION

Soient I et J deux intervalles.

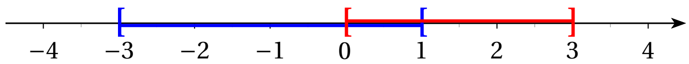
- L'**intersection** de I et de J notée $I \cap J$ (lire « I inter J ») est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à I **et** à J.
- L'**union** (ou la **réunion** de I et de J notée $I \cup J$ (lire « I union J ») est l'ensemble des nombres appartenant à I **ou** à J **ou** aux deux intervalles.

REMARQUE

Retenir que l'**intersection** correspond au mot « **et** » et que la **réunion** correspond au mot « **ou** ».

EXEMPLE

Si $I = [-3\ ;\ 1[$ et $J = [0\ ;\ 3]$, I est représenté en bleu et J en rouge sur la figure suivante :



$$I \cap J = [0\ ;\ 1[\text{ et } I \cup J = [-3\ ;\ 3]$$

III - VALEURS ABSOLUES

Intuitivement, la valeur absolue d'un nombre c'est « le nombre sans son signe. ». Par exemple, la valeur absolue de -5 est 5 et la valeur absolue de $1,12$ est $1,12$. Toutefois, lors de calculs littéraux, le signe peut être « caché » à l'intérieur de la lettre; par exemple, on ne peut pas dire que la valeur absolue de $-x$ est égale à x car c'est faux si x est négatif. D'où la définition suivante :

DÉFINITION

Soit x un nombre réel On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel positif ou nul défini par

- $|x| = x$ si x est positif ou nul,
- $|x| = -x$ si x est négatif ou nul.

EXEMPLES

- $|-1| = -(-1) = 1$
- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ car $\sqrt{2} > 1$ donc $\sqrt{2} - 1$ est positif.

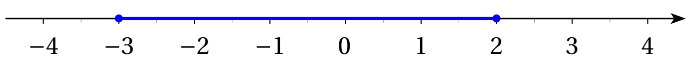
PROPRIÉTÉ

La distance entre les nombres réels x et y est égale à $|y-x|$ (ou aussi à $|x-y|$).

En particulier, $|x|$ est la distance de x à 0.

EXEMPLE

Les nombres -3 et 2 sont représentés sur l'axe ci-dessous :



La distance entre -3 et 2 est égale à :

$$|-3-2| = |-5| = 5$$

La distance entre -3 et 0 est égale à :

$$|-3| = 3$$