

GRAPHES : GÉNÉRALITÉS [SPÉ]

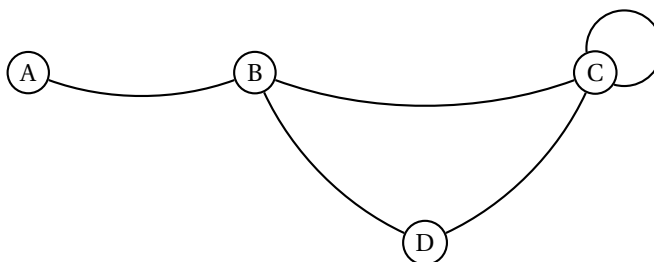
1. VOCABULAIRE

DÉFINITION

Un **graphe** est composé de **sommets** et d'**arêtes** (ou **arcs**) reliant certains de ces sommets.

EXEMPLE

Le diagramme ci-dessous représente un graphe comportant 4 sommets et 5 arêtes.



DÉFINITIONS

- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

EXEMPLE

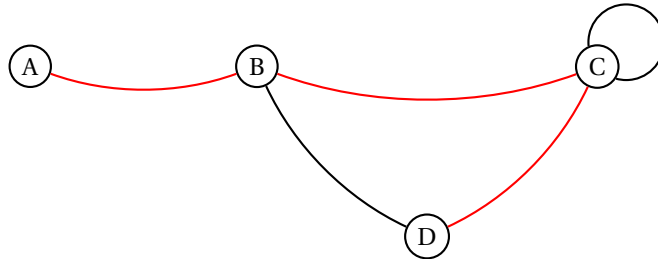
- Le graphe représenté ci-dessus est d'ordre 4.
- Le degré du sommet B est 3. Celui de C est 4 (la boucle compte 2 fois).
- A et B sont adjacents. A et D ne le sont pas.

DÉFINITIONS

Une **chaîne** (ou un **chemin**) est une suite de sommets telle que chaque sommet est relié au suivant par une arête.

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes composant cette chaîne.

EXEMPLE

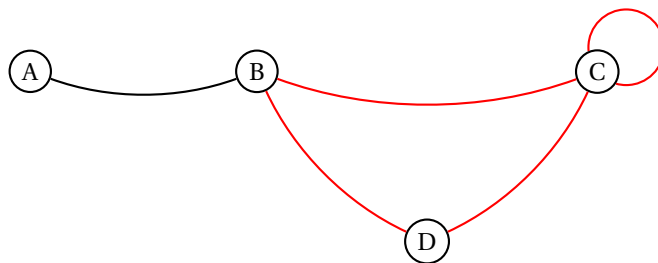


(A ; B ; C ; D) est une chaîne de longueur 3.

DÉFINITION

Un **cycle** est une chaîne **fermée** (c'est à dire dont l'origine et l'extrémité sont identiques) dont toutes les arêtes sont distinctes.

EXEMPLE



(B ; C ; C ; D ; B) est un cycle.

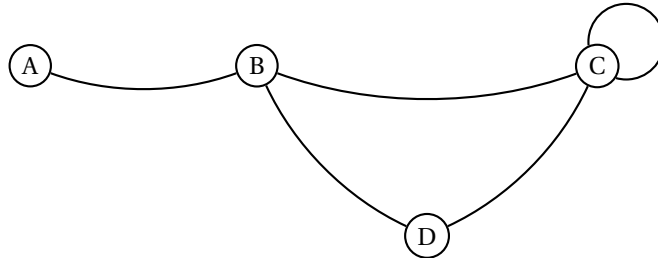
DÉFINITION

On dit qu'un graphe est **connexe** si deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

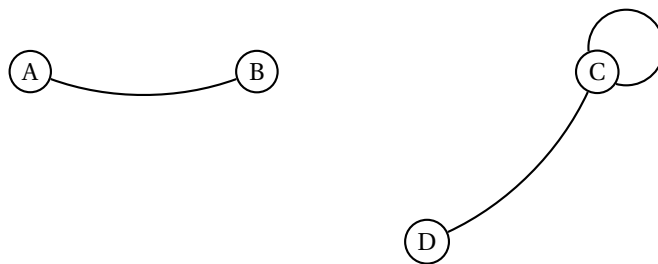
REMARQUE

Intuitivement, cela signifie que le graphe comporte un seul "morceau"

EXEMPLE



Graphe connexe



Graphe non connexe

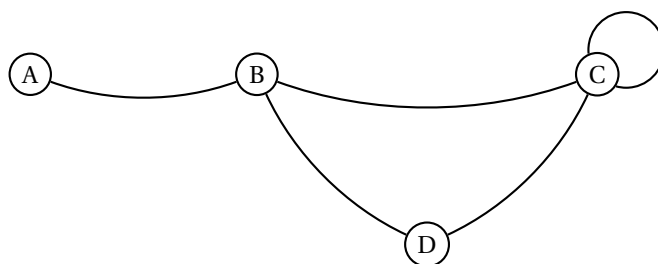
2. CHÂÎNES ET CYCLES EULÉRIENS

DÉFINITION

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chacune des arêtes du graphe.

Si cette chaîne est un cycle, on parle de **cycle eulérien**.

EXEMPLE



(A; B; C; C; D; B) est une chaîne eulérienne.

Ce graphe ne contient aucun cycle eulérien.

REMARQUE

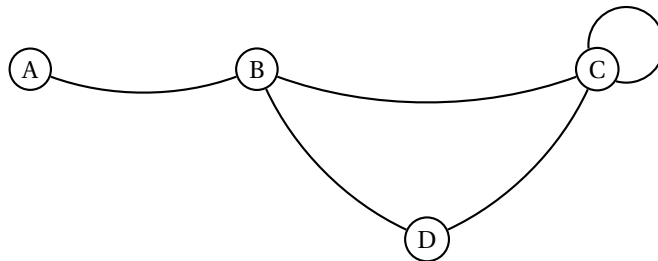
- Un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si on peut le tracer "*sans lever le crayon*". Le théorème d'Euler (ci-dessous) permet de déterminer facilement ce type de graphe.
- On ne peut jamais tracer un graphe **non connexe** sans lever le crayon!

THÉORÈME

Théorème d'Euler. Un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.

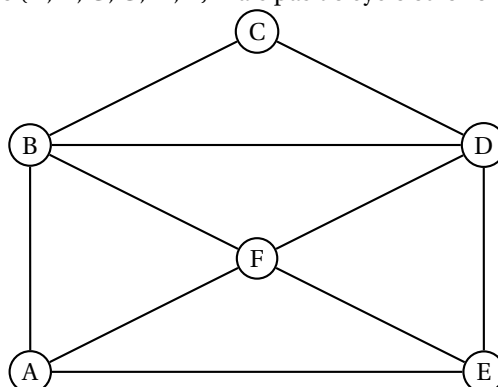
Un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair)

EXEMPLES



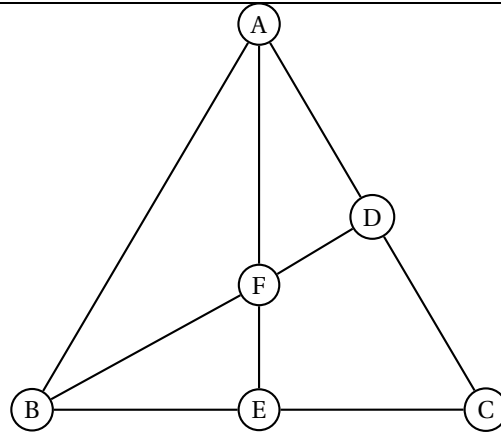
Exemple 1

Dans l'*exemple 1*, il y a deux sommets de degré impair (A :1 et B :3). Le graphe contient une chaîne eulérienne, par exemple (A; B; C; C; D; B) mais pas de cycle eulérien.

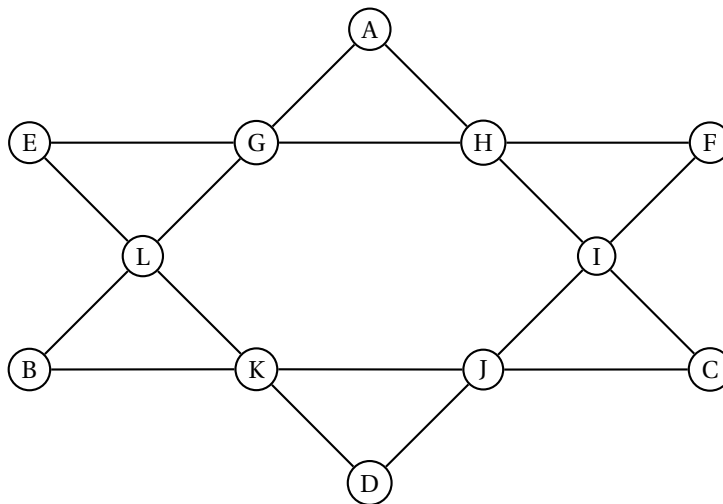


Exemple 2

Dans l'*exemple 2*, il y a deux sommets de degré impair (A :3 et E :3). Le graphe contient une chaîne eulérienne, par exemple (A; F; D; B; F; E; D; C; B; A; E) mais pas de cycle eulérien.

*Exemple 3*

Dans l'*exemple 3*, il y a 4 sommets de degré impair (A :3, B :3, D :3 et E :3). Le graphe ne contient pas de chaîne eulérienne.

*Exemple 4*

Dans l'*exemple 4*, tous les sommets sont de degré pair. Le graphe contient un cycle eulérien, par exemple : (G; A; H; F; I; C; J; D; K; B; L; E; G; H; I; J; K; L; G).

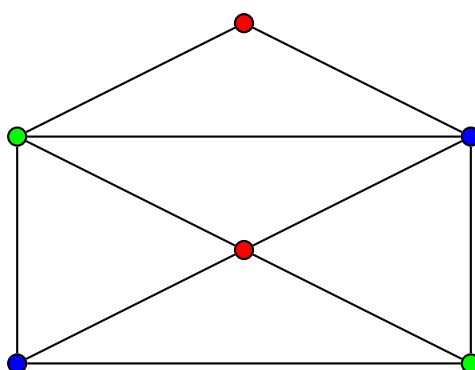
3. COLORATION D'UN GRAPHE

DÉFINITION

Colorier un graphe c'est associer à tout sommet une couleur telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier un graphe s'appelle le **nombre chromatique** du graphe.

EXEMPLE



Exemple 2

Le graphe ci-dessus a été colorié à l'aide de 3 couleurs différentes. Il n'est pas possible de le colorier avec seulement 2 couleurs. Le nombre chromatique du graphe est donc 3.

THÉORÈME

Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $d_{max} + 1$ où d_{max} est le plus grand degré des sommets.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent le plus grand degré est 4. Le nombre chromatique du graphe est donc inférieur ou égal à 5 (On a vu que c'était 3).

4. ALGORITHME DE DIJKSTRA

L'algorithme de Dijkstra (*prononcer approximativement « Dextra »*) permet de trouver **le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe** (orienté ou non orienté).

Le fonctionnement de l'algorithme de Dijkstra est généralement présenté sous forme d'un tableau dans lequel chaque ligne représente une étape.

La construction d'un tel tableau est détaillée dans la fiche méthode : [Algorithme de Dijkstra - Étape par étape](#) .