

## FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN EN TERMINALE ES/L

### 1. DÉFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

#### THÉORÈME ET DÉFINITION

Pour tout réel  $x > 0$ , l'équation  $e^y = x$ , d'inconnue  $y$ , admet une **unique** solution.

La fonction **logarithme népérien**, notée  $\ln$ , est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  qui à  $x > 0$ , associe le réel  $y$  solution de l'équation  $e^y = x$ .

#### REMARQUES

- Pour  $x \leq 0$ , par contre, l'équation  $e^y = x$  n'a **pas de solution**.

#### PROPRIÉTÉS

- Pour tout réel  $x > 0$  et tout  $y \in \mathbb{R}$  :  $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$ .
- Pour tout réel  $x > 0$  :  $e^{\ln(x)} = x$ .
- Pour tout réel  $x$  :  $\ln(e^x) = x$ .

#### REMARQUES

- Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition.
- On dit que les fonctions «logarithme népérien» et «exponentielle» sont *réciproques*.
- On en déduit immédiatement :  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$ .

### 2. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

#### THÉORÈME

La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sa dérivée est définie par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

#### PROPRIÉTÉ

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur  $]0; +\infty[$ .

## DÉMONSTRATION

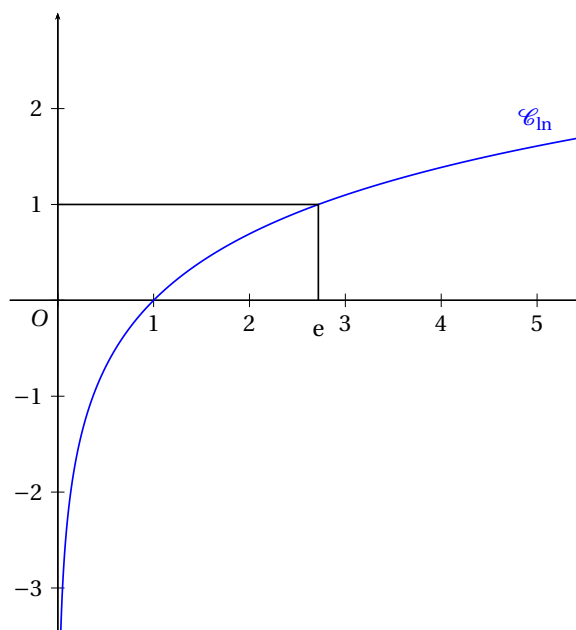
Sa dérivée  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ .

## REMARQUES

- Ces résultats permettent de tracer le tableau de variation et la courbe représentative de la fonction logarithme népérien :

$x$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$			+	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Tableau de variation de la fonction logarithme népérien



Représentation graphique de la fonction logarithme népérien

**PROPRIÉTÉ**

Soit  $u$  une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle  $I$ .

Alors la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f' = \frac{u'}{u}.$$

**EXEMPLE**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

**THÉORÈME**

Si  $a$  et  $b$  sont 2 réels strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$  si et seulement si  $a = b$ .
- $\ln a < \ln b$  si et seulement si  $a < b$ .

**REMARQUES**

- Le théorème précédent résulte de la stricte croissance de la fonction logarithme népérien.
- En particulier, comme  $\ln(1) = 0$  :  $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ . N'oubliez donc pas que  $\ln(x)$  **peut être négatif** (si  $0 < x < 1$ ) ; c'est une cause d'erreurs fréquente dans les exercices notamment avec des inéquations!

**3. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN****THÉORÈME**

Si  $a$  et  $b$  sont 2 réels strictement positifs et si  $n \in \mathbb{Z}$  :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ .
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ .
- $\ln(a^n) = n \ln a$ .
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ .

**EXEMPLES**

- $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln(2)$ .

- Pour  $x > 1$  :  $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ .

Cette égalité peut être intéressante (pour calculer la dérivée par exemple) mais il faut que  $x > 1$ .

Si  $x < -1$ , l'expression  $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  est définie mais pas  $\ln(x+1) - \ln(x-1)$ .