FONCTION EXPONENTIELLE

1. DÉFINITION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

THÉORÈME ET DÉFINITION

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** (de base e) et notée exp.

REMARQUE

L'existence d'une telle fonction est admise.

Son unicité est démontrée dans l'exercice : [ROC] Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle

NOTATION

On note $\text{e} = \exp(1)$.

On démontre que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(n) = \text{e}^n$

Cette propriété conduit à noter e^x l'exponentielle de x pour tout $x \in \mathbb{R}$

REMARQUE

On démontre (mais c'est hors programme) que $\text{e}\,(\approx 2,71828...)$ est un nombre **irrationnel**, c'est à dire qu'il ne peut s'écrire sous forme de fraction.

2. ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est **strictement positive** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE

Cette propriété très importante est démontrée dans l'exercice : [ROC] Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f' = u'\mathrm{e}^{u}$$

DÉMONSTRATION

On utilise le théorème de dérivation de fonctions composées.

EXEMPLE

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

LIMITES

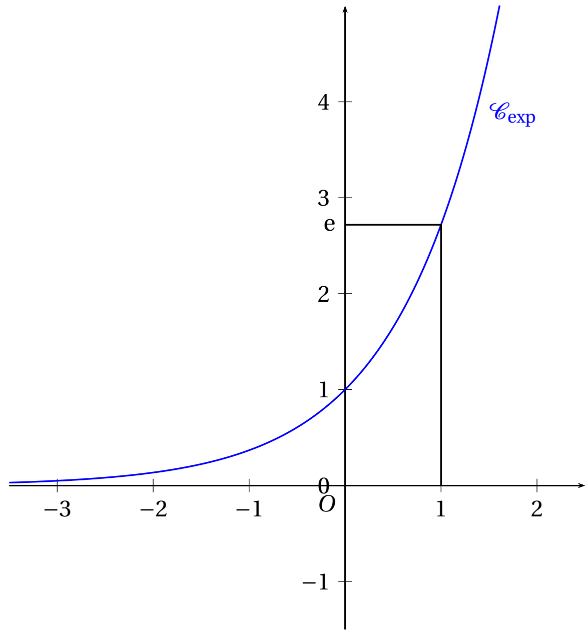
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$

REMARQUES

- Ces résultats sont démontrés dans l'exercice : [ROC] Limites de la fonction exponentielle
- On déduit des résultats précédents le tableau de variation et l'allure de la courbe de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x) = \mathrm{e}^{x}$				$+$			
$f(x) = \mathrm{e}^{x}$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

Tableau de variation de la fonction exponentielle



Graphique de la fonction exponentielle

THÉORÈME («CROISSANCE COMPARÉE»)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

REMARQUES

- Voir, à nouveau, l'exercice : [ROC] Limites de la fonction exponentielle pour la démonstration des deux premières formules.
- Les deux premières formules peuvent se généraliser de la façon suivante :
  Pour tout entier $n > 0$:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- La troisième formule s'obtient en utilisant la définition du nombre dérivé pour x=0 : (voir Calculer une limite à l'aide du nombre dérivé).
  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$

THÉORÈME

La fonction exponentielle étant strictement **croissante**, si a et b sont deux réels :

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$

REMARQUE

Ces résultats sont extrêmement utiles pour résoudre équations et inéquations.

3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

PROPRIÉTÉS

Pour tout réels a et b et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\left(e^a\right)^n = e^{na}$

REMARQUES

- Ces propriétés sont démontrées dans l'exercice : [ROC] Propriétés algébriques de la fonction exponentielle Elles sont similaires aux propriétés des puissances vues au collège (et justifient la notation e^x)
- Si l'on pose $a = \dfrac{1}{2}$ et $n = 2$ dans la formule $\left(e^a\right)^n = e^{na}$ on obtient $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^1 = e$ donc comme $e^{\frac{1}{2}} > 0 : e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$