NOMBRE DÉRIVÉ - FONCTION DÉRIVÉE

1. NOMBRE DÉRIVÉ

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient 2 réels x_0 et $h \neq 0$ tels que $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.

Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est le nombre :

$$T = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

DÉFINITION

Une fonction f est **dérivable** en x_0 si et seulement si le nombre $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un certain réel l lorsque h tend vers 0.

l est appelée **nombre dérivé** de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

On écrit : $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

REMARQUES

- Le quotient $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$.
- « *le nombre* $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ *a pour limite un certain réel* l *lorsque* h *tend vers 0* » signifie que $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se rapproche de l lorsque h se rapproche de 0.
  Une définition plus rigoureuse de la notion de limite sera vue en Terminale.
- On peut également définir le nombre dérivé de la façon suivante :
  $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
  (cela correspond au changement de variable $x = x_0 + h$)

EXEMPLE

Calculons le nombre dérivé de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ pour $x = 1$.

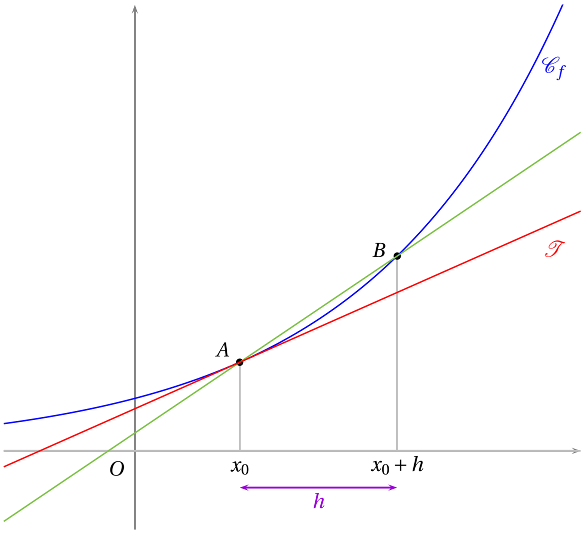
Ce nombre se note $f'(1)$ et vaut :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2 + h$$

Or quand h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2 ; donc $f'(1) = 2$.

REMARQUE :

Interprétation graphique du nombre dérivé :



Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

Lorsque h tend vers 0, B *"se rapproche"* de A et la droite (AB) se rapproche de la tangente $\mathscr{T}$.

Le nombre dérivée $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

DÉMONSTRATION

D'après la propriété précédente, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est une droite de coefficient directeur $f'(x_0)$. Son équation est donc de la forme :

$y = f'(x_0)x + b$

On sait que la tangente passe par le point A de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ donc :

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$

$b = -f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

L'équation de la tangente est donc :

$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

Soit :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2. FONCTION DÉRIVÉE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **dérivable** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x s'appelle la **fonction dérivée** et se note f'

PROPRIÉTÉS

Dérivée des fonctions usuelles :

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble de dérivabilité**
$k\ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N})$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

PROPRIÉTÉS

Formules de base :

Si u et v sont 2 fonctions dérivables sur un intervalle I. Sur cet intervalle :

Fonction	**Dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
$ku\ (k \in \mathbb{R})$	ku'
$\dfrac{1}{u}$ (avec $u(x) \neq 0$ sur I)	$-\dfrac{u'}{u^2}$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$ sur I)	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$ (avec $u \geqslant 0$ sur I)	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ lorsque $u>0$

EXEMPLE

On cherche à calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

On pose

$u(x) = x$ et $v(x) = x^2+1$

On a alors

$u'(x) = 1$

$v'(x) = 2x$

car la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto 2x$ (formule nx^{n-1} avec $n = 2$) et la dérivée de la fonction constante $x \mapsto 1$ est la fonction nulle.

La dérivée du quotient est donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

REMARQUES

- Si le dénominateur d'une fraction est constant, il est très maladroit d'utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
  Par exemple pour dériver $f(x) = \frac{x^2+1}{5}$ on écrira :
  $f(x) = \frac{1}{5} \times (x^2+1)$
  donc $f'(x) = \frac{1}{5} \times (2x)$ (formule $(ku)' = ku'$)
  $f'(x) = \frac{2x}{5}$
- De même, si le numérateur d'une fraction est constant on utilisera, de préférence, la formule :
  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
  Par exemple, si $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$
  $f(x) = 5 \times \frac{1}{x^2+1}$ donc :
  $f'(x) = 5 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{10x}{(x^2+1)^2}$ (formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$)

3. FONCTION DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATIONS

THÉORÈME

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

REMARQUE

Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I, alors f est **strictement** croissante (resp. décroissante) sur I.

Mais la réciproque est fausse. Une fonction peut être strictement croissante sur I alors que sa dérivée s'annule sur I. C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule pour $x = 0$

EXEMPLE

Reprenons la fonction de l'exemple précédent.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Le dénominateur de $f'(x)$ est toujours strictement positif.

Le numérateur de $f'(x)$ peut se factoriser : $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

Une facile étude de signe montre que f' est strictement négative sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$ et est strictement positive sur $]-1; 1[$.

Par ailleurs, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$

On en déduit le tableau de variations de f (que l'on regroupe habituellement avec le tableau de signe de f') :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	