PROBABILITÉS CONDITIONNELLES - INDÉPENDANCE

1.RAPPELS

RAPPELS DE DÉFINITIONS

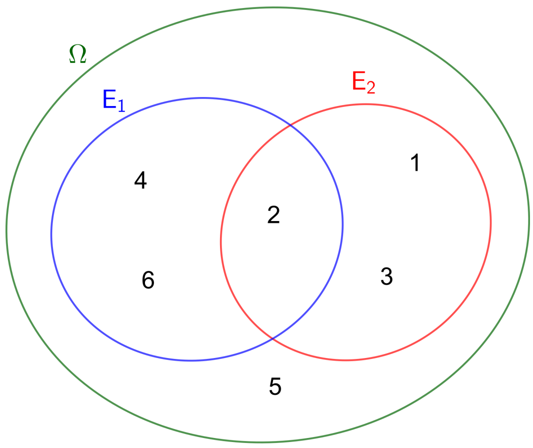
- Une expérience **aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.
- Chacun des résultats possibles s'appelle une **éventualité** (ou une **issue**).
- L'ensemble Ω de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- On définit une **loi de probabilité** sur Ω en associant, à chaque éventualité x_i, un réel p_i compris entre 0 et 1 tel que la somme de tous les p_i soit égale à 1.
- Un événement est un sous-ensemble de Ω.

EXEMPLES

Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers comportant 6 **éventualités** : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

- L'ensemble $E_1 = \{2;4;6\}$ est un **événement**. En français, cet événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est un nombre pair* »
- L'ensemble $E_2 = \{1;2;3\}$ est un autre événement. Ce second événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est strictement inférieur à 4* ».

Ces événements peuvent être représentés par un diagramme de Venn :



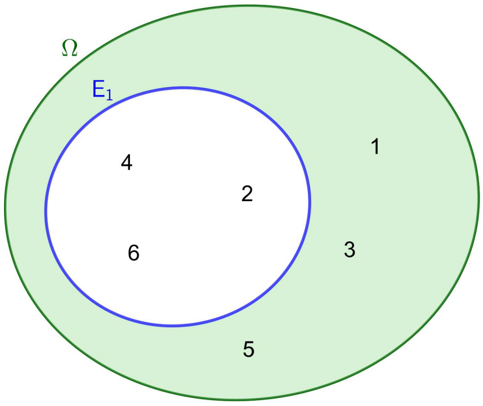
DÉFINITIONS

- l'événement contraire de A noté $\bar{A}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- l'événement $A \cup B$ (lire « A union B » ou « A ou B » est constitué des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles.
- l'événement $A \cap B$ (lire « A inter B » ou « A et B » est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.

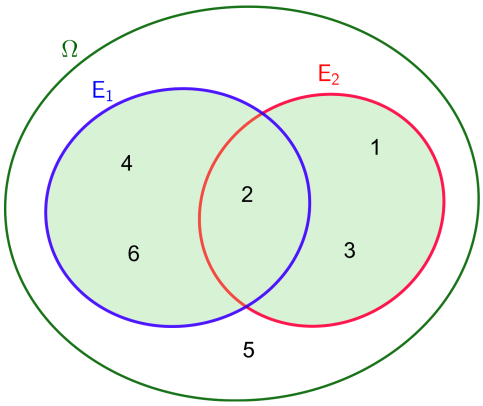
EXEMPLE

On reprend l'exemple précédent : $E_1 = \{2; 4; 6\}$ $E_2 = \{1; 2; 3\}$

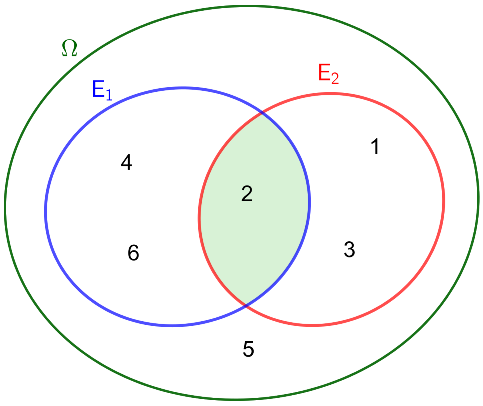
- $\overline{E}_1 = \{1; 3; 5\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est un nombre impair »



- $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 6\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **ou** strictement inférieur à 4 ».



- $E_1 \cap E_2 = \{2\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **et** strictement inférieur à 4 ».



DÉFINITION

On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$

REMARQUE

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements peuvent être incompatibles sans être contraires.

EXEMPLE

« Obtenir un chiffre inférieur à 2 » et « obtenir un chiffre supérieur à 4 » sont deux événements incompatibles.

PROPRIÉTÉS

- $p(\varnothing) = 0$
- $p(\Omega) = 1$
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Si A et B sont incompatibles, la dernière égalité devient :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

2. ARBRE

Lorsqu'une expérience aléatoire comporte plusieurs étapes, on utilise souvent un arbre pondéré pour la représenter.

EXEMPLE

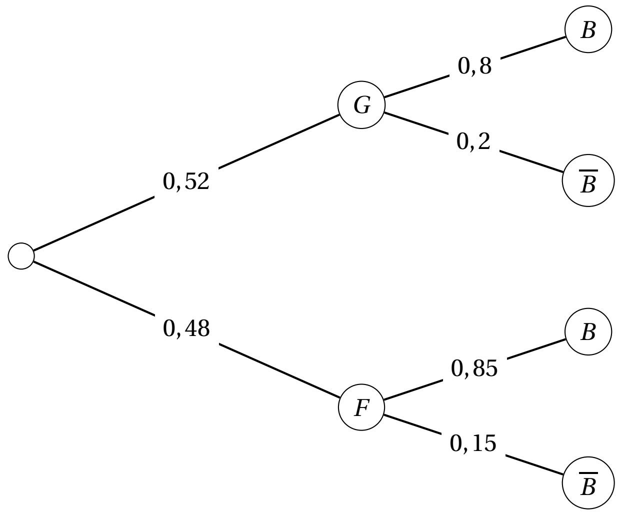
Dans une classe de Terminale, 52% de garçons et 48% de filles étaient candidats au baccalauréat.

80% des garçons et 85% des filles ont obtenu leur diplôme.

On choisit un élève au hasard et on note :

- G : l'événement « l'élève choisi est un garçon » ;
- F : l'événement « l'élève choisie est une fille » ;
- B : l'événement « l'élève choisi(e) a obtenu son baccalauréat ».

On peut représenter la situation à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous :



Le premier niveau indique le genre de l'élève (G ou F) et le second indique l'obtention du diplôme (B ou $\overline{B}$).

On inscrit les probabilités sur chacune des branches.

La **somme** des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud **est toujours égale à 1**.

3. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

DÉFINITION

Soit A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$, **la probabilité de B sachant A** est le nombre :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

On peut aussi noter cette probabilité $p(B/A)$.

EXEMPLE

On reprend l'exemple du lancer d'un dé. La probabilité d'obtenir un chiffre pair sachant que le chiffre obtenu est strictement inférieur à 4 est (en cas d'équiprobabilité) :

$$p_{E_2}(E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{1}{3}.$$

REMARQUES

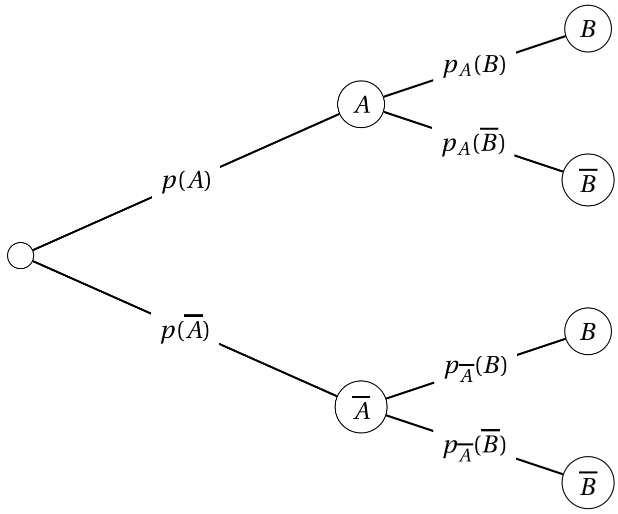
- L'égalité précédente s'emploie souvent sous la forme :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$$

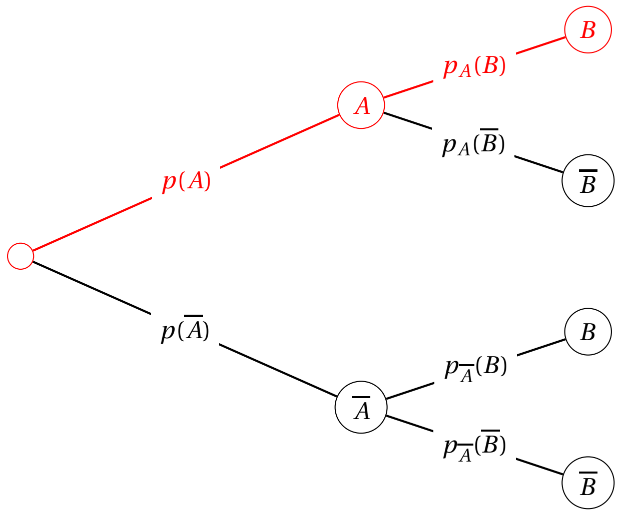
pour calculer la probabilité de $A\cap B$.

- **Attention** à ne pas confondre $p_A(B)$ et $p(A\cap B)$ dans les exercices.
On doit calculer $p_A(B)$ lorsque l'**on sait que** A **est réalisé.**

- Avec un arbre pondéré, les probabilités conditionnelles figurent sur les branches du second niveau et des niveaux supérieurs (s'il y en a).
La probabilité inscrite sur la branche reliant A à B est $p_A(B)$.
Typiquement, un arbre binaire à deux niveaux se présentera ainsi :



- La formule $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$ s'interprète alors de la façon suivante :
« La probabilité de l'événement $A\cap B$ s'obtient en faisant **le produit** des probabilités inscrites sur le chemin passant par A et B ».



4. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

DÉFINITION

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

PROPRIÉTÉ

A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p_A(B) = p(B).$$

DÉMONSTRATION

Elle résulte directement du fait que pour deux événements quelconques :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

REMARQUE

Comme $A \cap B = B \cap A$, A et B sont interchangeables dans cette formule et on a également :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p_B(A) = p(A).$$

5. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

DÉFINITION

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω si et seulement si $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.

CAS PARTICULIER FRÉQUENT

Pour toute partie $A \subset \Omega$, A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

PROPRIÉTÉ (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES)

Si A_1, A_2,... A_n forment une partition de Ω, pour tout événement B, on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B).$$

Cette formule peut également s'écrire à l'aide de probabilités conditionnelles :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

CAS PARTICULIER FRÉQUENT

En utilisant la partition $\left\{A, \overline{A}\right\}$, quels que soient les événements A et B :

$$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$$
$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B).$$

REMARQUE

À l'aide d'un arbre pondéré, ce résultat s'interprète de la façon suivante :
« La probabilité de l'événement B est égale à la somme des probabilités des trajets menant à B ».