

## DIVISION EUCLIDIENNE - NOMBRES PREMIERS - PGCD

### 1 - DIVISION EUCLIDIENNE

#### DÉFINITION

Soient  $a$  et  $b$ , deux nombres entiers naturels (c'est à dire positifs) avec  $b \neq 0$ .

Effectuer la **division euclidienne** de  $a$  par  $b$ , c'est trouver deux entiers naturels  $q$  et  $r$  tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b$$

$q$  s'appelle le **quotient** et  $r$  le **reste**.

#### EXEMPLE

$$\begin{array}{r|l}
 6894 & 23 \\
 \hline
 -46 & 299 \\
 \hline
 229 & \\
 -207 & \\
 \hline
 224 & \\
 -207 & \\
 \hline
 17 & \\
 \hline
 \end{array}$$

↖  
299  
quotient

↖  
17  
reste

Écriture en ligne :

$$6894 = 23 \times 299 + 17$$

299 est le **quotient** et 17 le **reste**.

#### REMARQUE

Sur la plupart des calculatrices de collège la touche qui permet d'effectuer la division euclidienne est notée :  $\text{F}$ .

Par exemple, la suite de touches à entrer pour obtenir la division euclidienne de 6894 par 23 sur une TI-Collège est :



et voici le résultat obtenu à l'écran :

6894F23  
Q=299 R=17

**DÉFINITION**

On dit que  $a$  est **divisible** par  $b$  si le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est nul.

Cela revient à dire qu'il existe un entier naturel  $q$  tel que  $a = b \times q$ .

Les expressions suivantes sont synonymes :

- $a$  est divisible par  $b$
- $a$  est un multiple de  $b$
- $b$  est un diviseur de  $a$
- $b$  divise  $a$  (que l'on écrit parfois  $b|a$ )

**EXEMPLE**

La division euclidienne de 630 par 15 donne un quotient de 42 et un reste nul.

On a donc  $630 = 15 \times 42$ .

On peut dire que :

- 630 est divisible par 15
- 630 est un multiple de 15
- 15 est un diviseur de 630
- 15 divise 630

(On peut aussi dire que 630 est divisible par 42, etc.)

**CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ**

- Un entier naturel est divisible par 2 si son **chiffre des unités** est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3 si la **somme de ses chiffres** est divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 4 si le nombre formé par ses **deux derniers chiffres** est divisible par 4.
- Un entier naturel est divisible par 5 si son **chiffre des unités** est 0 ou 5.
- Un entier naturel est divisible par 9 si la **somme de ses chiffres** est divisible par 9.
- Un entier naturel est divisible par 10 si son **chiffre des unités** est 0.

**REMARQUES**

- **Attention :** Pour les critères de divisibilité par 3 et par 9, il faut effectuer la **somme des chiffres** (et non regarder le chiffre des unités)
- Il n'existe pas de critère de divisibilité par 7 qui soit très simple. Le plus rapide est en général d'effectuer la division!

**EXEMPLE**

- 1314 est divisible par 2 (chiffre des unités : 4)
- 1314 est divisible par 3 (somme des chiffres : 9)
- 1314 n'est pas divisible par 4 (deux derniers chiffres : 14)

- 1314 n'est pas divisible par 5 (chiffre des unités : 4)
- 1314 est divisible par 9 (somme des chiffres : 9)
- 1314 n'est pas divisible par 10 (chiffre des unités : 4)

## 2 - NOMBRES PREMIERS

### DÉFINITION

On dit qu'un nombre entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

### EXEMPLES

- 2; 3; 5 sont des nombres premiers;
- **0 n'est pas** un nombre premier car il est divisible par tous les entiers supérieurs ou égal à 1.
- **1 n'est pas** un nombre premier car il n'admet qu' **un seul** diviseur (lui-même).
- À l'exception du nombre 2, tous les entiers pairs **ne sont pas** des nombres premiers (car ils sont divisibles par 2). Cela signifie qu'à l'exception du nombre 2, tous les nombres premiers sont impairs. Par contre, la réciproque est fautive : tous les nombres impairs ne sont pas premiers; par exemple 1 (voir ci-dessus) et 15 (divisible par 1; 3; 5 et 15) ne sont pas premiers.

### REMARQUE

Il est utile de connaître par cœur la liste des nombres premiers inférieurs à 20 (ou plus ...) :

**2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19**

### THÉORÈME

#### Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. Cette décomposition est **unique** (à l'ordre des facteurs près).

### REMARQUE

Ce résultat très important est également appelé « **Théorème fondamental de l'arithmétique** »

### EXEMPLE

- $10 = 2 \times 5$
- $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$
- $23 = 23$  (un seul facteur car 23 est premier!)

**MÉTHODE**

Pour décomposer un nombre  $N$  en produit de facteurs premiers, on peut essayer de le diviser successivement par chaque nombre premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ . Le méthode détaillée est décrite sur la fiche : Décomposition en produit de facteurs premiers.

**3 - PGCD****DÉFINITION**

Le **PGCD** de deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  est le plus grand diviseur commun à  $a$  et à  $b$ , c'est à dire le plus grand entier naturel qui divise à la fois  $a$  et  $b$ .

**EXEMPLE**

Soit à déterminer le PGCD de 600 et 315.

Les diviseurs de 600 sont :

1;2;3;4;5;6;8;10;12;15;20;24;25;30;40;50;60;75;100;120;150;200;300;600

Les diviseurs de 315 sont :

1;3;5;7;9;15;21;35;45;63;105;315

Le plus grand diviseur commun est donc 15 (le plus grand nombre figurant à la fois dans les deux listes).

$PGCD(600 ; 315) = 15$ .

Il existe plusieurs méthodes permettant de trouver le PGCD de deux nombres de façon plus rapide, sans avoir besoin de faire la liste de tous les diviseurs. En classe de Troisième, il faut connaître la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers (voir ci-dessous). D'autres méthodes sont proposées en compléments : [Calcul du PGCD par soustractions successives et algorithme d'Euclide](#) ↗.

Par ailleurs, de nombreuses calculatrices (de niveau collège ou lycée) possède une touche permettant de calculer le PGCD de deux entiers naturels.

**EXEMPLES****Calcul du PGCD à l'aide de décomposition en produit de facteurs premiers**

- Exemple 1 : Calcul du PGCD de 45 et de 150 :

Les décompositions en facteurs premiers de 45 et de 150 sont :

$$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$$

3 et 5 sont les facteurs premiers figurant dans les deux décompositions donc le PGCD de 45 et de 150 est  $3 \times 5 = 15$ .

- Exemple 2 : Calcul du PGCD de 108 et de 144 :

Les décompositions en produit de facteurs premiers de 108 et de 144 sont :

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$$

$$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$$

Le facteur 2 est présent (au moins) deux fois dans chacune des décompositions ainsi que le facteur 3; donc le PGCD de 108 et de 144 est  $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ .

#### DÉFINITION

Une fraction est **irréductible** si son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun mis à part 1, c'est à dire si le PGCD du numérateur et du dénominateur est égal à 1.

#### EXEMPLES

- $\frac{5}{6}$  est une fraction irréductible car  $PGCD(5;6) = 1$ .
- $\frac{121}{99}$  n'est pas une fraction irréductible car  $PGCD(121;99) = 11$ .

La fraction se simplifie donc par 11 :

$$\frac{121}{99} = \frac{11 \times 11}{9 \times 11} = \frac{11}{9}$$