DÉRIVÉES EN PREMIÈRE ES ET L

I - NOMBRE DÉRIVÉ

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I.

On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et b le nombre :

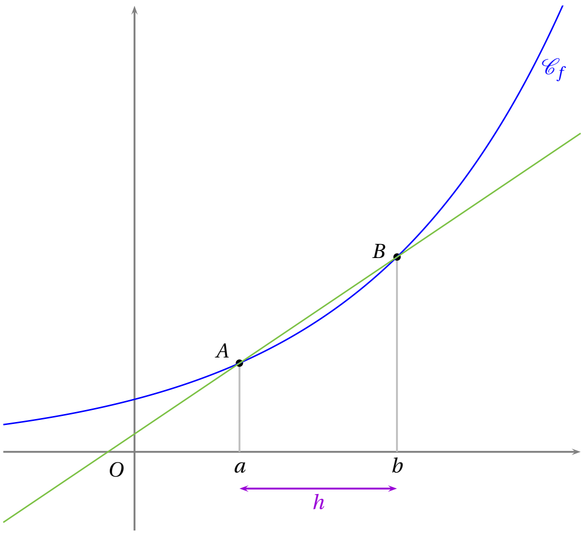
$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

REMARQUE

En faisant le changement de variable : $b = a + h$ (h représente alors l'écart entre b et a), ce taux s'écrit aussi :

$$T = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE



Le taux d'accroissement de f entre a et b est le **coefficient directeur** de la droite (AB).

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers zéro.

Ce nombre s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

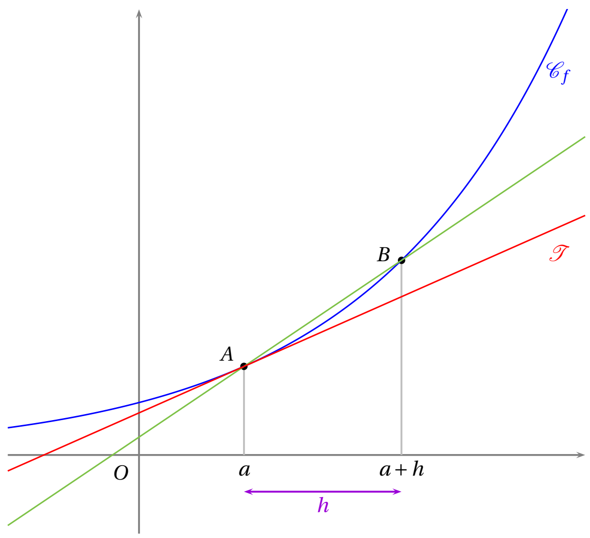
EXEMPLE

Calculons le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2$ pour $x = 1$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1^2}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Or quand h tend vers 0, $2+h$ tend vers 2; donc $f'(1) = 2$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE



Lorsque h se rapproche de zéro, le point B se rapproche du point A et la droite (AB) se rapproche de la tangente $\mathscr{T}$

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative C_f . $f'(a)$ représente le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative C_f . L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

DÉMONSTRATION

D'après la propriété précédente, la tangente à C_f au point d'abscisse a est une droite de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est donc de la forme :

$$y = f'(a)x + b$$

On sait que la tangente passe par le point A de coordonnées $\left(a; f(a)\right)$ donc :

$f(a) = f'(a)\,a + b$

$b = -f'(a)\,a + f(a)$

L'équation de la tangente est donc :

$y = f'(a)\,x - f'(a)\,a + f(a)$

Soit :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

EXEMPLE

Cherchons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse $a = 1$.

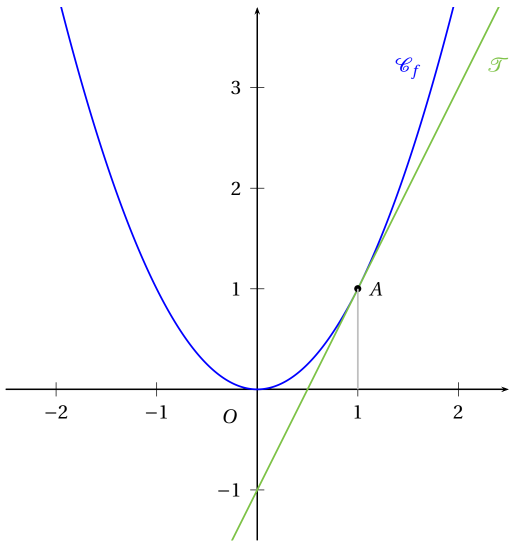
On a $f(1) = 1^2 = 1$ et on a vu dans l'exemple précédent que $f'(1) = 2$.

L'équation cherchée est donc :

$y = 2(x - 1) + 1$

soit :

$y = 2x - 1$



II - FONCTION DÉRIVÉE

DÉFINITION

Si f est définie sur un intervalle I et si le nombre dérivé existe en chaque point de I, on dit que f est **dérivable** sur I. La fonction qui a x associe le nombre dérivé de f en x s'appelle **fonction dérivée** de f et se note f'

DÉRIVÉE DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble de dérivabilité**
k ($k \in \mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

OPÉRATIONS

Si u et v sont 2 **fonctions** dérivables :

Fonction	**Dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
ku ($k \in \mathbb{R}$)	ku'
$\frac{1}{u}$ (avec $u(x) \neq 0$ sur I)	$-\frac{u'}{u^2}$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

EXEMPLES

- On cherche à calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

  f est la somme des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$

  $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$

  donc $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$

  g est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = x^3 - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$

  $u'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$ et $v'(x) = 2x + 0 = 2x$

  $g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(3x^2)(x^2+1) - (x^3-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

- Soit enfin la fonction h définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x) = \frac{3}{x^2-1}$

  On pourrait utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ comme précédemment mais cela ne sera pas très judicieux. En effet, le numérateur étant constant, il y a une manière plus rapide de procéder. Il suffit d'écrire :

  $h(x) = 3 \times \frac{1}{x^2-1}$

  et d'appliquer la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = x^2 - 1$ (donc $v'(x) = 2x$)

On obtient :

$h'(x) = 3 \times -\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} = -\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}$

III - APPLICATIONS DE LA DÉRIVÉE

Si nécessaire, revoir la notion de sens de variation d'une fonction .

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est **croissante** sur I si et seulement si $f'(x)$ est **positif ou nul** pour tout $x \in I$.

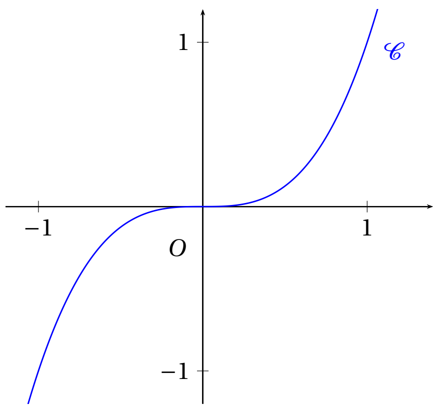
De plus si $f'(x)$ est **strictement positive** sur I, sauf éventuellement en quelques points, alors f est **strictement croissante** sur I.

EXEMPLE

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2$ est positive ou nulle sur $[-1;1]$, donc f est **croissante** sur $[-1;1]$.

Comme par ailleurs, f' est strictement positive sauf pour $x = 0$, f est **strictement croissante** sur $[-1;1]$.



Fonction cube sur $[-1;1]$

On a un théorème analogue si la dérivée est négative :

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est **décroissante** sur I si et seulement si $f'(x)$ est **négatif ou nul** pour tout $x \in I$.

De plus si $f'(x)$ est **strictement négative** sur I, sauf éventuellement en quelques points, alors f est **strictement décroissante** sur I.

REMARQUES

- Si f est dérivable, les théorèmes précédents montre que l'étude des variations de f se ramène à l'étude du **signe de la dérivée.**
- On regroupe couramment le tableau de signe de la dérivée et le tableau de variations de f dans un même tableau à 3 lignes (voir exemple ci-dessous)
- Pour montrer qu'une fonction f admet un maximum en a, on peut montrer que f est croissante pour $x < a$ et décroissante pour $x > a$; c'est à dire, si f est dérivable, que f' est positive pour $x < a$ et négative pour $x > a$.

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$