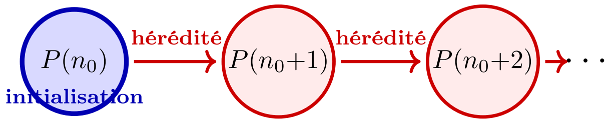
Récurrence — fiche révision

À retenir



DÉFINITION Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$. Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, le raisonnement par récurrence se fait en **3 étapes**.

INITIALISATION Vérifier que $P(n_0)$ est vraie (le plus souvent $n_0 = 0$ ou 1).

HÉRÉDITÉ Soit $n \geqslant n_0$ quelconque. **Supposer** $P(n)$ vraie (hypothèse de récurrence) et **démontrer** $P(n+1)$.

CONCLUSION D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple type

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$: $2^n \geqslant n+1$.

Posons $P(n)$: $2^n \geqslant n+1$.

Initialisation ($n=0$) : $2^0 = 1$ et $0+1=1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geqslant 0$ tel que $2^n \geqslant n+1$. Alors :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2(n+1) = 2n+2 \geqslant n+2$$

Donc $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pièges classiques

Initialisation oubliée : sans elle, la récurrence ne démarre pas. Même avec une hérédité correcte, on n'a démontré qu'une implication, pas une vérité. Toujours vérifier $P(n_0)$ explicitement.

Hypothèse de récurrence mal formulée : écrire « supposons $P(n)$ vraie **pour tout** n » revient à supposer ce que l'on cherche à démontrer. L'hypothèse porte sur **un seul** entier n fixé quelconque : à ce rang précis, on suppose $P(n)$ vraie pour en déduire $P(n+1)$.

Mauvais rang de départ : si $P(0)$ est faux mais $P(1)$ vrai, l'initialisation doit se faire à $n_0 = 1$. Vérifier que le rang de départ correspond au domaine annoncé.