

Primitives & équations différentielles — fiche révision

À retenir

DÉFINITION F est une **primitive** de f sur I ssi $F' = f$ sur I . Si f est continue sur I , elle admet des primitives. Deux primitives diffèrent d'une **constante réelle** : si F est une primitive, toutes s'écrivent $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

PRIMITIVES USUELLES Pour $n \neq -1$: $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$;
 $\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x|$; $e^x \rightarrow e^x$; $\cos x \rightarrow \sin x$; $\sin x \rightarrow -\cos x$; $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$; $\frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}$.

COMPOSITION Avec u dérivable :

$$u' e^u \rightarrow e^u ; \quad \frac{u'}{u} \rightarrow \ln|u|$$
$$u' u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1} ; \quad \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES Solutions sur \mathbb{R} :

$$y' = ay \Leftrightarrow y(x) = C e^{ax} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

$$y' = ay + b \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Condition initiale $y(x_0) = y_0 \rightarrow$ détermine C de façon **unique**.

Exemple type

Primitive avec composition

Donner une primitive de $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ sur \mathbb{R} .

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ (donc $u'(x) = 2x$).

Comme $u > 0$ sur \mathbb{R} : $F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Équation différentielle avec condition initiale

Résoudre $y' = 2y$ avec $y(0) = 3$.

Solutions générales : $y(x) = C e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Condition $y(0) = 3$ donne $C e^0 = C = 3$.

Solution unique : $y(x) = 3 e^{2x}$.

Équation avec second membre

Résoudre $y' = -y + 3$ avec $y(0) = 5$.

Forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$, $b = 3$.

Solutions générales : $y(x) = C e^{-x} - \frac{3}{-1} = C e^{-x} + 3$, $C \in \mathbb{R}$.

$y(0) = 5 \Rightarrow C + 3 = 5 \Rightarrow C = 2$.

Solution unique : $y(x) = 2 e^{-x} + 3$.

Pièges classiques

Constante + C oubliée : une primitive n'est définie qu'à une constante réelle près. Toujours écrire $F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) si on demande l'ensemble des solutions.

$\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x|$ **avec valeur absolue** : sur \mathbb{R}_+^* , c'est $\ln x$; sur \mathbb{R}_-^* , c'est $\ln(-x)$. La notation $\ln|x|$ couvre les deux cas.

$y' = ay + b$: **ne pas oublier le** $-\frac{b}{a}$: la solution particulière constante est $y_p = -\frac{b}{a}$ (et **non** $+\frac{b}{a}$).