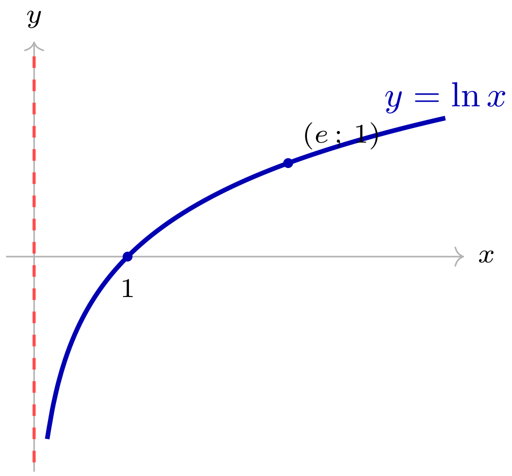
Fonction logarithme népérien — fiche révision

À retenir



DÉFINITION $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la **réciproque** de exp. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.
Équivalences : $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$ (avec $b > 0$) ; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES Pour tous a, $b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b\ ;\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a\ ;\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln$$

DÉRIVÉE & SIGNE $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; **composition** : $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (avec $u > 0$).
$\ln$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$.
Signe : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

LIMITES
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
Croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Exemple type

Équation et inéquation
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(x) + \ln(x-2) = \ln 3$ puis $\ln x \leqslant 1$.

Conditions d'existence : $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $x > 2$.
$\ln(x) + \ln(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln\big(x(x-2)\big) = \ln 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Racines : $x = -1$ ou $x = 3$. Seule $x = 3$ vérifie $x > 2$.

Pour la seconde : $\ln x \leqslant 1 = \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leqslant e$.
Solution : $S =]0\,;\,e]$.

Étude de fonction
Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de f.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le **signe de** $(x-1)$.

$f' < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f' > 0$ sur $]1\,;+\infty[$: f admet un **minimum** en $x = 1$, valeur $f(1) = 1$. Donc $f(x) \geqslant 1 > 0$: la courbe est au-dessus de l'axe.

Pièges classiques

Domaine d'existence : $\ln u$ exige $u > 0$. Toujours **poser les CE avant** de résoudre, et vérifier que les solutions trouvées les respectent.
$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$: la formule est $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Le logarithme transforme les **produits en sommes**, pas les sommes en sommes.
Composition : u' oublié : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Exemple : $\big(\ln(x^2+1)\big)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, **pas** $\dfrac{1}{x^2+1}$.