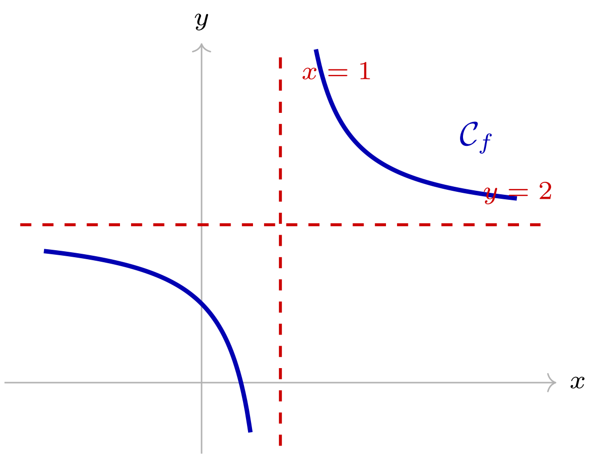
Limites & continuité — fiche révision

À retenir



CONTINUITÉ f continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Polynômes, e^x, $\ln$, $\sqrt{\cdot}$, $\sin$, $\cos$ sont continus sur leur domaine.

LIMITES USUELLES $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Formes indéterminées : $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

ASYMPTOTES $y = L$ asymptote **horizontale** $\Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f = L$. $x = a$ asymptote **verticale** $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f = \pm\infty$.

TVI Soit f continue sur $[a; b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$
.

Corollaire : si f est strictement monotone, c est **unique**.

Exemple type

Application du TVI

Montrer que $f(x) = x^3 + x - 1$ admet une **unique** solution dans $[0\,;1]$.

f est un polynôme (donc continue) et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$).

$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: $k = 0$ est entre $f(0)$ et $f(1)$. Par le TVI (corollaire pour la stricte monotonie), il existe une **unique** solution $c \in [0\,;1]$ telle que $f(c) = 0$.

Continuité par morceaux

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Étudier la continuité en $x = 1$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \times 1 - 1 = 2$; $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

Les trois valeurs coïncident, donc f est **continue** en 1
.

Pièges classiques

Forme indéterminée : ne jamais conclure $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ni $\infty - \infty = 0$. Il faut **transformer** l'expression (factoriser le terme dominant, multiplier par le conjugué...) pour lever l'indétermination.
TVI mal appliqué : vérifier les **trois** conditions — continuité sur $[a; b]$, valeur k entre $f(a)$ et $f(b)$, et stricte monotonie pour conclure à l'**unicité** (sans monotonie, on n'a que l'existence).
Limite à droite ≠ limite à gauche : si $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$, alors f n'a **pas de limite** en a. Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim_{x \to 0^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} f = -\infty$.