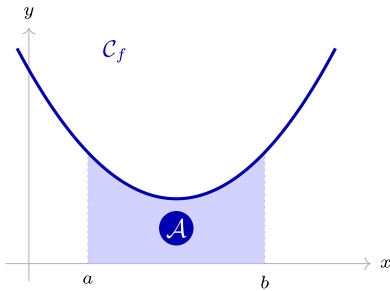


Intégrales — fiche révision

À retenir



DÉFINITION Si f est continue et positive sur $[a; b]$, l'aire (en unités d'aire) sous C_f entre a et b vaut $\mathcal{A} = \int_a^b f(t) dt$.

LIEN AVEC UNE PRIMITIVE Si f est continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f : $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Conventions : $\int_a^a f = 0$; $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

PROPRIÉTÉS Linéarité : $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Chasles : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

Positivité : $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.

Comparaison : $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

VALEUR MOYENNE Valeur moyenne de f sur $[a; b]$ ($a < b$) : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

INTÉGRATION PAR PARTIES Si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$: $\int_a^b u' v dt = [u v]_a^b - \int_a^b u v' dt$.

Stratégie : choisir v qui se **simplifie en dérivant** (polynôme, \ln) et u' qui se **primitive facilement** (e^t , $\cos t$, $\sin t$).

Exemple type

Calcul d'aire

Calculer $\int_0^2 x^2 dx$.

Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Comme $x^2 \geq 0$ sur $[0; 2]$, cette intégrale est aussi l'aire sous C_f entre 0 et 2.

Intégration par parties

Calculer $\int_0^1 t e^t dt$.

On pose $v(t) = t$ (se simplifie : $v'(t) = 1$) et $u'(t) = e^t$ (donc $u(t) = e^t$).

$$\int_0^1 t e^t dt = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - 0 - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Valeur moyenne

Valeur moyenne de $f(x) = x$ sur $[0; 4]$:

$$\mu = \frac{1}{4-0} \int_0^4 x dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \times 8 = 2.$$

⚠ Pièges classiques

Intégrale \neq aire si $f < 0$: l'égalité $\mathcal{A} = \int_a^b f$ n'est valable que si $f \geq 0$ sur $[a; b]$. Sinon, l'intégrale est **algébrique** : les portions où $f < 0$ comptent en négatif. Pour l'aire géométrique totale, calculer $\int_a^b |f(t)| dt$ (découper selon le signe de f).

Bornes inversées : $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Si on échange les bornes, le signe change. Avant d'appliquer positivité ou comparaison, **vérifier** que $a \leq b$.

IPP : choix de u' et v : si on intervertit, le calcul devient plus compliqué qu'au départ. Règle pratique : v doit se **simplifier en dérivant** (polynôme, \ln) et u' doit être **facile à primitiver** (e^t , $\cos t$, $\sin t$).