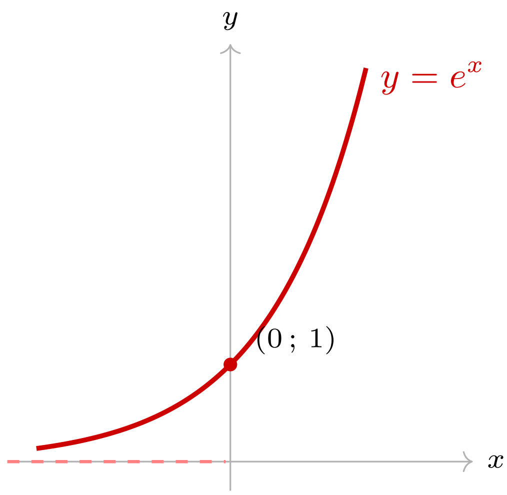
Fonction exponentielle — fiche révision

À retenir



DÉFINITION $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est l'**unique** fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Notation $\exp(x) = e^x$, avec $e \approx 2{,}718$.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES Pour tous a, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad ; \quad (e^a$$

DÉRIVÉE & SIGNE $(e^x)' = e^x$; **composition** : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$.
$\exp$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ et $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

LIMITES $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exemple type

Équation et inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} = e^{x+3}$ puis $e^x > 1$.

Par stricte croissance de $\exp$:

$e^{2x} = e^{x+3} \Leftrightarrow 2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 3$.
$e^x > 1 = e^0 \Leftrightarrow x > 0$. Solution : $S =]0\,;+\infty[$.

Dérivée d'une composée

Soit $f(x) = x\, e^{-x}$. Étudier le signe de $f'(x)$.

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le **signe de** $(1 - x)$: $f' > 0$ sur $]-\infty\,; 1[$ et $f' < 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

f admet donc un **maximum** en $x = 1$, valeur $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

Pièges classiques

e^x **n'est pas une multiplication** : $e^2 = e \times e \approx 7{,}39$, **pas** $2e \approx 5{,}44$. La variable est en exposant.

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, **pas** $e^a + e^b$: l'exponentielle transforme les **sommes en produits** (et $\ln$ fait l'inverse).

Composition : u' oublié : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$. Exemple : $\left(e^{x^2}\right)' = 2x\, e^{x^2}$, **pas** e^{x^2}.