Convergence des suites — fiche révision

À retenir

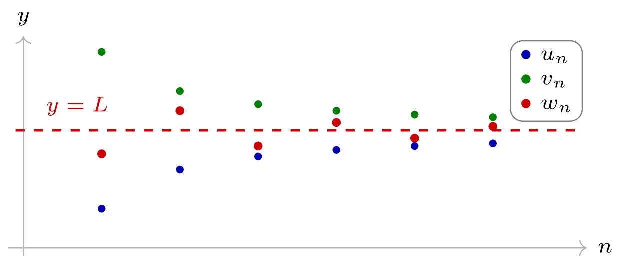
SUITES DE RÉFÉRENCE $\lim n = +\infty$; $\lim n^k = +\infty$; $\lim \sqrt{n} = +\infty$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ $(k \geqslant 1)$. Limite de q^n : voir fiche **Suites**.

OPÉRATIONS La limite d'une somme/produit/quotient se calcule terme à terme, sauf **formes indéterminées** : $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ (factoriser le terme dominant pour lever l'indétermination).

COMPARAISON & GENDARMES

Comparaison : si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Gendarmes : si $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = \lim v_n = L$, alors $\lim w_n = L$.



CONVERGENCE MONOTONE Toute suite **croissante et majorée** converge. Toute suite **décroissante et minorée** converge. Toute suite **croissante non majorée** diverge vers $+\infty$.

Exemple type

Théorème des gendarmes

Montrer que $w_n = \frac{\sin n}{n}$ converge pour $n \geqslant 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$: $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc en divisant par $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or $\lim \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim w_n = 0$.

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ avec $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 4}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On **factorise par** n^2 (plus haute puissance) au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Quand $n \to +\infty$, $\frac{2}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{4}{n^2} \to 0$, donc $\lim u_n = \frac{3}{1} = 3$.

Pièges classiques

Suite bornée ≠ suite convergente : il faut aussi la **monotonie** (théorème de convergence monotone). Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge en oscillant.

Gendarmes mal appliqué : les deux suites encadrantes doivent converger vers **la même** limite. Si $\lim u_n \neq \lim v_n$, on ne peut **rien conclure** sur w_n.