TRIANGLES SEMBLABLES

COURS

Triangles semblables

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

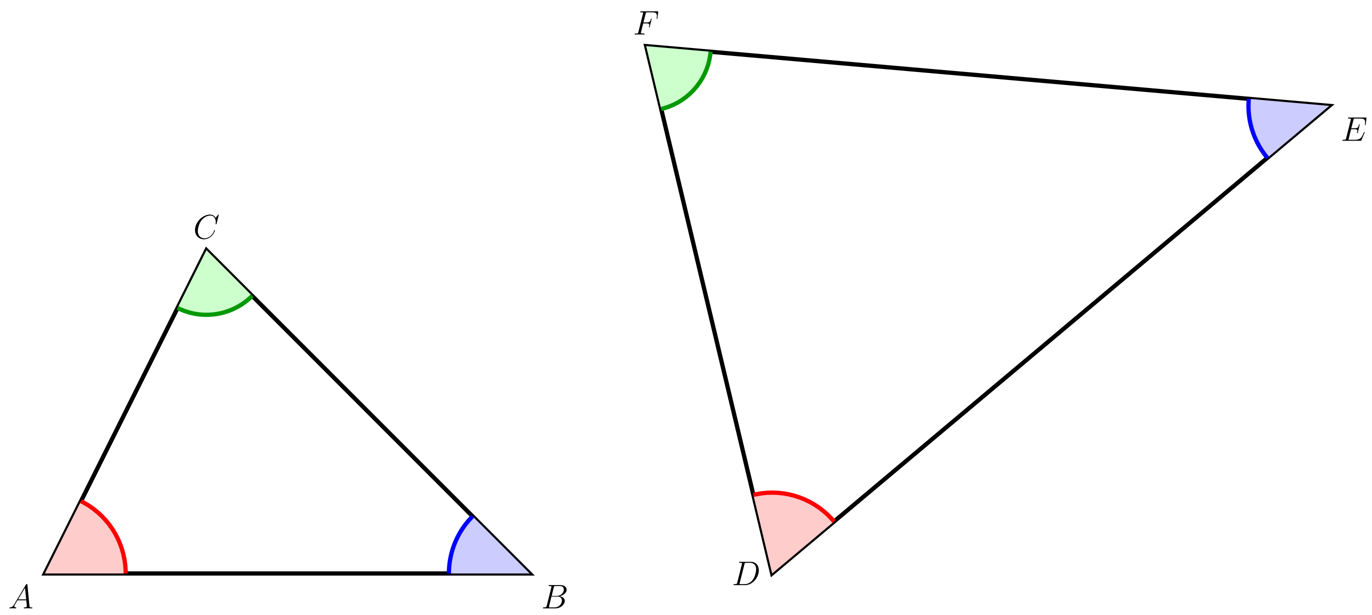
- Démontrer que deux triangles sont semblables par les longueurs
- Calculer le coefficient de similitude
- Démontrer que deux triangles sont semblables par les angles
- Calculer une longueur inconnue avec des triangles semblables

La notion de triangles semblables est intuitivement liée à celle de **forme**. Deux figures sont semblables si elles ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille. On peut passer de l'une à l'autre par un **agrandissement** ou une **réduction** (zoom).

1 - Définition et angles

Définition

Deux triangles sont dits **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.



Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux : $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ *et* $\widehat{C} = \widehat{F}$.

1er cas de similitude

La somme des angles d'un triangle étant toujours égale à 180°, il suffit que deux triangles aient **deux paires d'angles de même mesure** pour qu'ils soient semblables. La troisième paire est alors nécessairement égale.

Exemple

Soit un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 40^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$ et $\widehat{C} = 80^\circ$.

Soit un triangle DEF tel que $\widehat{D} = 80^\circ$ et $\widehat{E} = 40^\circ$.

On calcule le troisième angle : $\widehat{F} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$.

Les triangles ABC et DEF ont deux paires d'angles de même mesure ($\widehat{A} = \widehat{E} = 40^\circ$ et $\widehat{B} = \widehat{F} = 60^\circ$), donc ils sont **semblables**.

Les sommets homologues sont : $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow D$.

Remarque

C'est le point clé pour éviter les erreurs.

- Les sommets où se trouvent les angles égaux sont appelés **sommets homologues**.
- Les côtés opposés aux angles égaux sont appelés **côtés homologues**.

Exemple : si $\widehat{A} = \widehat{D}$, alors le côté $[BC]$ (opposé à A) est homologue au côté $[EF]$ (opposé à D).

Propriété fondamentale

Si deux triangles sont semblables, alors les **longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles**.

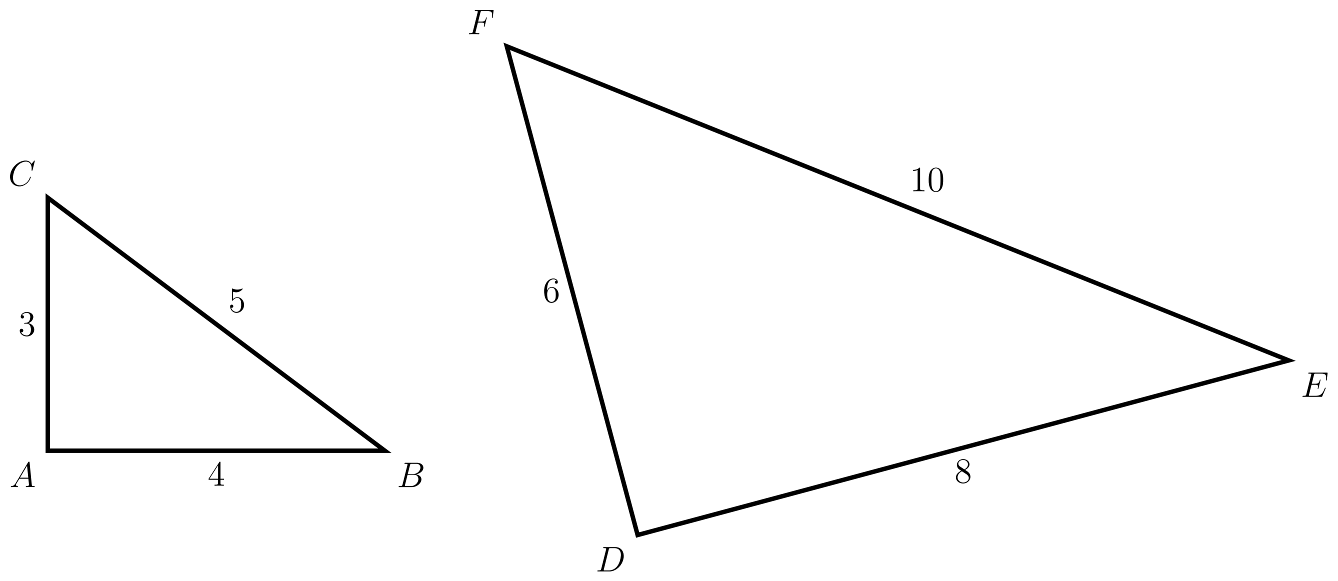
La réciproque est également vraie :

2e cas de similitude

Deux triangles dont les **côtés sont deux à deux proportionnels** sont semblables.

En pratique, on classe les côtés de chaque triangle par ordre croissant, puis on calcule les trois rapports entre côtés correspondants. Si les trois rapports sont égaux, les triangles sont semblables.

Exemple : un triangle de côtés 3, 4, 5 et un triangle de côtés 6, 8, 10.
Les rapports sont : $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$. Les trois rapports sont égaux, donc les triangles sont semblables.



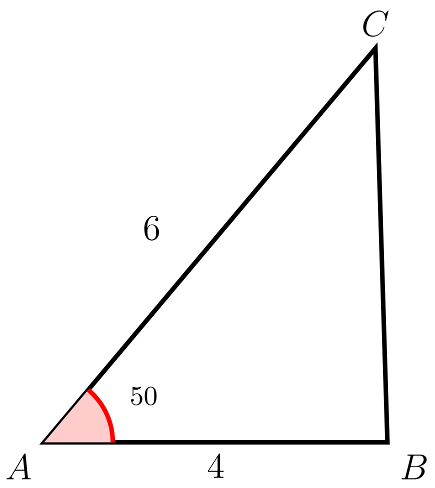
3e cas de similitude

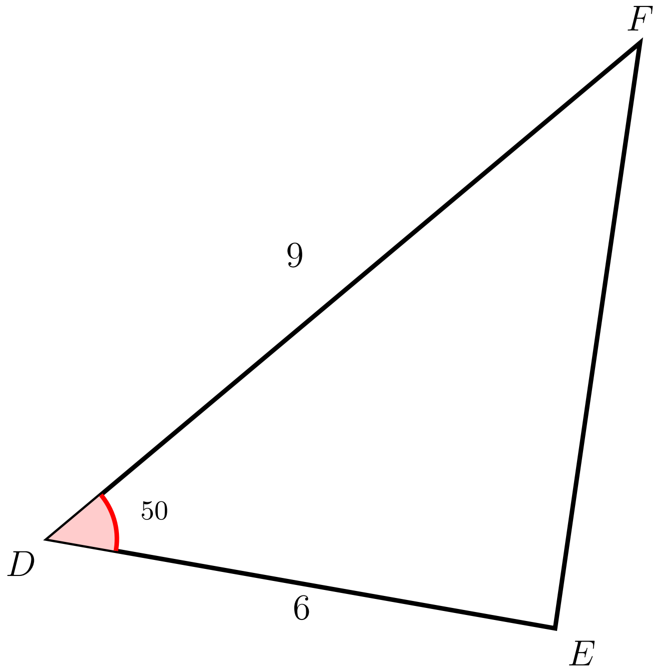
Deux triangles ayant **un angle de même mesure compris entre deux côtés proportionnels** sont semblables.

Autrement dit, si dans deux triangles on repère un angle de même mesure, et que les deux côtés qui forment cet angle sont proportionnels (même rapport), alors les triangles sont semblables. Il n'est pas nécessaire de connaître les troisièmes côtés.

Exemple : un triangle ABC avec $\widehat{A} = 50^\circ$, $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm et un triangle DEF avec $\widehat{D} = 50^\circ$, $DE = 6$ cm, $DF = 9$ cm.

L'angle $\widehat{A} = \widehat{D} = 50^\circ$ et les côtés qui le forment vérifient : $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$ et $\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{9}{6} = 1{,}5$. Les triangles sont semblables.


C
6
50
A
4
B


F
9
50
D
6
E

2 - Coefficient de similitude

Coefficient de similitude

Si ABC et DEF sont semblables avec les correspondances $(A \leftrightarrow D)$, $(B \leftrightarrow E)$, $(C \leftrightarrow F)$, le nombre k tel que :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$$

est appelé **coefficient de similitude**.

- Si $k > 1$: c'est un **agrandissement**.
- Si $k = 1$: les triangles sont **isométriques** (mêmes dimensions).
- Si $0 < k < 1$: c'est une **réduction**.

Exemple

Les triangles ABC et DEF sont semblables avec les correspondances $(A \leftrightarrow D)$, $(B \leftrightarrow E)$, $(C \leftrightarrow F)$.

On donne $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 6$ cm et $DE = 6$ cm.

Le coefficient de similitude est :

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

On en déduit les autres longueurs :

$EF = k \times BC = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5$ cm

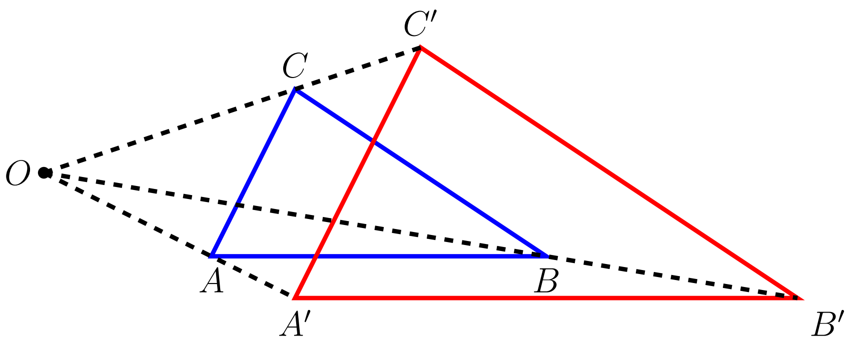
$DF = k \times AC = 1{,}5 \times 6 = 9$ cm

Lien avec l'homothétie

L'image d'un triangle par une homothétie de rapport k est un triangle semblable au triangle initial.

Attention

La réciproque est fausse : deux triangles semblables ne sont pas forcément homothétiques. C'est le cas dès que leurs côtés homologues ne sont pas deux à deux parallèles, comme les triangles ABC et DEF de la première figure de ce cours.



Triangles homothétiques donc semblables.

Lien avec la configuration de Thalès

Dans une configuration de Thalès, les deux triangles formés sont semblables. Le coefficient de similitude est alors le rapport des longueurs des côtés parallèles.

Rapport des aires

Si deux triangles sont semblables avec un coefficient de similitude k, alors le rapport de leurs aires est k^2 :

$$\text{Aire}_2 = k^2 \times \text{Aire}_1$$

Exemple

Deux triangles sont semblables avec un coefficient de similitude $k = 1{,}5$.

L'aire du petit triangle est 10 cm².

L'aire du grand triangle est : $10 \times (1{,}5)^2 = 10 \times 2{,}25 = 22{,}5$ cm².

Les questions essentielles

1. Comment démontrer que deux triangles sont semblables par les longueurs ?

On classe les côtés de chaque triangle par ordre croissant, puis on calcule les trois rapports entre côtés correspondants. Si les trois rapports sont égaux, les triangles sont semblables.

Voir la fiche méthode : Démontrer que deux triangles sont semblables par les longueurs

2. Comment calculer le coefficient de similitude ?

On identifie une paire de côtés homologues dont les longueurs sont connues, puis on calcule le rapport de la longueur du triangle image par la longueur homologue du triangle initial.

Voir la fiche méthode : Calculer le coefficient de similitude

3. Comment démontrer que deux triangles sont semblables par les angles ?

On cherche deux paires d'angles de même mesure entre les deux triangles (angles communs, angles droits, angles correspondants...). Si on en trouve deux, les triangles sont semblables.

Voir la fiche méthode : Démontrer que deux triangles sont semblables par les angles

4. Comment calculer une longueur inconnue avec des triangles semblables ?

On justifie la similitude, on identifie les côtés homologues, on calcule le coefficient k, puis on multiplie la longueur connue par k pour obtenir la longueur cherchée.

Voir la fiche méthode : Calculer une longueur inconnue avec des triangles semblables

Télécharger en PDF