

Probabilités

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

Utiliser l'événement contraire pour calculer une probabilité

Déterminer si deux événements sont incompatibles

Construire un arbre pondéré pour une expérience à deux épreuves

Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre pondéré

Utiliser un tableau à double entrée pour dénombrer les issues

1 - Expérience aléatoire - Issues - Événements

Définition

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.

Exemple

- Le lancer d'une pièce de monnaie à « *Pile ou face* » est une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont « Pile » et « Face » .
- Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire dont les résultats possibles correspondent aux entiers compris entre 1 et 6.

Définition

On appelle **issue** (ou **éventualité** ou **événement élémentaire**) un résultat possible d'une expérience aléatoire.

On appelle **événement** un ensemble d'issues.

Exemple

On lance un dé à six faces.

- « Obtenir le chiffre 6 » est une issue de cette expérience.

- « Obtenir un chiffre pair » est un événement composé des trois issues : « obtenir le chiffre 2 », « obtenir le chiffre 4 » et « obtenir le chiffre 6 ».

2 - Probabilité d'un événement

Définition

La **probabilité** d'un événement est un nombre **compris entre 0 et 1** qui mesure la « chance » que cet événement se réalise.

Un événement qui ne peut pas se réaliser s'appelle événement **impossible**. Sa probabilité est égale à 0.

Un événement qui se réalisera obligatoirement s'appelle événement **certain**. Sa probabilité est égale à 1.

Exemple

- La probabilité d'obtenir un chiffre supérieur à 7 en lançant un dé à six faces est égale à 0 (événement impossible).
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 7 en lançant un dé à six faces est égale à 1 (événement certain).

Définition

On dit qu'il y a **équiprobabilité** si toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité de se réaliser.

Remarque

C'est en général l'énoncé d'un exercice ou la logique qui indiquera si l'on est - ou non - dans une situation d'équiprobabilité.

Voici des exemples d'énoncés indiquant qu'il y a équiprobabilité :

- On choisit *au hasard* sous-entend que tous les choix sont équiprobables.
- On lance un dé (ou une pièce) *non truqué(e)* (ou *bien équilibré(e)*) signifie que chacune des faces possède la même probabilité d'apparaître.
- Une urne contient des boules *indiscernables au toucher* signifie que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Propriété

Dans le cas d'une expérience aléatoire dans laquelle il y a **équiprobabilité**, la probabilité d'un événement est égale à :

$$p = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement}}{\text{nombre total d'issues possibles}}$$



Exercice corrigé

Une urne contient six boules indiscernables au toucher. Quatre sont blanches, une est rouge et la dernière est noire.

On tire une boule au hasard.

Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

Solution :

On est en situation d'équiprobabilité.

Il y a six boules donc 6 issues possibles.

Il y a quatre boules blanches donc 4 issues satisfaisant l'événement « la boule tirée est blanche ».

La probabilité demandée est donc :

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$



Propriété

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui composent cet événement.



Remarque

Cette propriété est valable même si l'on n'est pas en situation d'équiprobabilité.

Propriété

La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est toujours égale à **1**.

Remarque

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'un événement se rapproche d'un nombre : c'est la **probabilité** de cet événement. On dit que la fréquence se **stabilise** vers la probabilité.

Par exemple, en lançant une pièce équilibrée, la fréquence d'apparition de « Pile » se rapproche de plus en plus de 0,5 à mesure que le nombre de lancers augmente :

Nombre de lancers	10	100	1 000	10 000
Fréquence de « Pile »	0,40	0,53	0,506	0,498

Sur quelques lancers, la fréquence peut être assez éloignée de 0,5 ; sur un très grand nombre de lancers, elle s'en rapproche nettement. C'est ce qu'on observe dans l'exercice [Fréquence et probabilité](#).

Exercice corrigé

Un dé à six faces a été truqué de façon à obtenir le chiffre 6 une fois sur deux.

On suppose qu'alors, les probabilités de chacune des issues sont les suivantes :

Chiffre	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair en lançant le dé une fois ?

Solution :

L'événement « obtenir un chiffre pair » est constitué des issues : « obtenir le chiffre 2 » (probabilité : 0,1), « obtenir le chiffre 4 » (probabilité : 0,1) et « obtenir le chiffre 6 » (probabilité : 0,5).

La probabilité cherchée est la somme de ces trois probabilités :

$$p = 0,1 + 0,1 + 0,5 = 0,7.$$

3 - Événement contraire

Définition

L'**événement contraire** d'un événement A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$.

Propriété

La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire est égale à 1.

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Remarque

Cette propriété est très utile lorsqu'il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire que celle de l'événement lui-même.

Exercice corrigé

On lance un dé à six faces non truqué. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre différent de 6 ?

Solution :

Soit A l'événement « obtenir le chiffre 6 ». Son événement contraire $\overline{A}$ est « obtenir un chiffre différent de 6 ».

On a $p(A) = \frac{1}{6}$, donc :

$$p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

4 - Événements incompatibles

Définition

Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple

On lance un dé à six faces. Les événements « obtenir un chiffre pair » et « obtenir le chiffre 3 » sont incompatibles : un résultat ne peut pas être à la fois pair et égal à 3.

En revanche, les événements « obtenir un chiffre pair » et « obtenir un chiffre supérieur à 4 » ne sont pas incompatibles car le chiffre 6 réalise les deux événements.

Propriété

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités :

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$$

Attention

Cette formule n'est valable que si les événements A et B sont incompatibles. Si les deux événements peuvent se réaliser en même temps, on ne peut pas simplement additionner les probabilités.

Exercice corrigé

On lance un dé à six faces non truqué. Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 ou un 6 ?

Solution :

Les événements « obtenir un 1 » et « obtenir un 6 » sont incompatibles car un dé ne peut pas afficher les deux chiffres en même temps.

On a $p(\text{obtenir un 1}) = \frac{1}{6}$ et $p(\text{obtenir un 6}) = \frac{1}{6}$, donc :

$$p(\text{obtenir un 1 ou un 6}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

5 - Expériences à deux épreuves

Définition

Une **expérience à deux épreuves** est une expérience aléatoire constituée de deux étapes successives.

On peut représenter une telle expérience à l'aide d'un **arbre pondéré** : on inscrit sur chaque branche la probabilité de l'événement correspondant.

Propriété

Dans un arbre pondéré, la probabilité de l'événement auquel conduit un chemin est égale au **produit des probabilités** rencontrées le long de ce chemin.

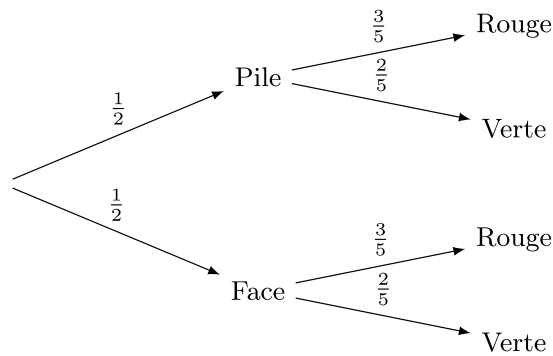
Exercice corrigé

On lance une pièce de monnaie équilibrée, puis on tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

Quelle est la probabilité d'obtenir Pile puis une boule rouge ?

Solution :

On représente cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.



La probabilité d'obtenir Pile puis une boule rouge correspond au chemin Pile - Rouge. On multiplie les probabilités le long de ce chemin :

$$p(\text{Pile puis Rouge}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

i Remarque

Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est toujours égale à 1.

Par exemple, dans l'arbre ci-dessus : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ pour la première épreuve,
 et $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$ pour la seconde épreuve.

Le tableau à double entrée

Définition

Pour une expérience à deux épreuves, on peut aussi dénombrer les issues à l'aide d'un **tableau à double entrée** : on place les issues de la première épreuve en lignes, celles de la seconde en colonnes, et on remplit chaque case avec le résultat correspondant.

Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces et on s'intéresse à la somme des deux résultats. Le tableau ci-dessous donne toutes les sommes possibles :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables. Pour obtenir une somme égale à 7, on compte 6 cases favorables, donc :

$$p(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Remarque

Le tableau à double entrée et l'arbre pondéré décrivent la même expérience : le tableau est particulièrement commode lorsque les issues sont **équiprobables**.

1. Comment calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité ?

Il faut compter le nombre d'issues favorables à l'événement et le diviser par le nombre total d'issues possibles. C'est la formule fondamentale des probabilités en 3e.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité](#)

2. Comment utiliser l'événement contraire pour calculer une probabilité ?

Quand l'événement cherché a beaucoup d'issues favorables, il est souvent plus simple de calculer la probabilité de son contraire, puis d'utiliser la formule $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

Voir la fiche méthode : [Utiliser l'événement contraire pour calculer une probabilité](#)

3. Comment savoir si deux événements sont incompatibles ?

Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. On vérifie qu'aucune issue ne réalise les

deux événements à la fois, puis on peut additionner leurs probabilités.

Voir la fiche méthode : [Déterminer si deux événements sont incompatibles](#)

4. Comment construire un arbre pondéré ?

On trace une branche par issue pour chaque épreuve et on inscrit les probabilités sur chaque branche. La somme des probabilités issues d'un même noeud doit toujours être égale à 1.

Voir la fiche méthode : [Construire un arbre pondéré pour une expérience à deux épreuves](#)

5. Comment calculer une probabilité à l'aide d'un arbre pondéré ?

On identifie le chemin correspondant à l'événement, puis on multiplie les probabilités rencontrées le long de ce chemin. Si plusieurs chemins mènent au même événement, on additionne les résultats.

Voir la fiche méthode : [Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre pondéré](#)

6. Comment utiliser un tableau à double entrée pour calculer des probabilités ?

On place les issues de chaque épreuve en ligne et en colonne, puis on compte les cases favorables parmi toutes les cases du tableau. C'est une alternative à l'arbre pondéré, idéale en équiprobabilité.

Voir la fiche méthode : [Utiliser un tableau à double entrée pour dénombrer les issues](#)

 Télécharger en PDF