TRANSFORMATIONS ET HOMOTHÉTIES

COURS

Transformations et homothéties

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Construire l'image d'un point par une homothétie
- Déterminer le rapport d'une homothétie
- Calculer des longueurs dans une homothétie
- Calculer une aire après un agrandissement ou une réduction
- Déterminer si une homothétie est un agrandissement ou une réduction

Ce chapitre introduit une nouvelle transformation du plan : l'homothétie. Elle complète les transformations vues au cycle 4 (symétries, translation, rotation) en permettant de traiter les agrandissements et réductions.

1. Rappel : Les transformations du plan

Avant d'aborder les homothéties, il est important de distinguer les transformations appelées isométries, qui conservent les longueurs et les formes.

Les isométries (Rappels 5eme/4eme)

- **Symétrie axiale** : Pliage le long d'une droite (l'axe).
- **Symétrie centrale** : Demi-tour autour d'un point (le centre).
- **Translation** : Glissement selon une direction, un sens et une longueur.
- **Rotation** : Pivotement autour d'un centre, d'un angle donné et dans un sens donné.

Ces quatre transformations conservent les **longueurs** (les figures ne sont pas déformées) et les **aires**. L'image d'une figure est une figure superposable.

2. Les homothéties

Une homothétie est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire une figure. Elle ne conserve pas (en général) les longueurs.

A. Définition

Homothétie

Une homothétie est définie par un **centre** O et un **rapport** k (nombre relatif non nul).
Transformer un point M en un point M' par l'homothétie de centre O et de rapport k signifie que :

- **Si** $k > 0$: M' appartient à la demi-droite $[OM)$ et $OM' = k \times OM$.
- **Si** $k < 0$: M' est de l'autre côté de O par rapport à M (c'est-à-dire O appartient au segment $[MM']$) et $OM' = |k| \times OM$.

B. Les différents cas du rapport k

La taille de l'image (agrandissement ou réduction) dépend de la valeur absolue $|k|$ du rapport.

Rappel : valeur absolue

La **valeur absolue** d'un nombre, notée $|k|$, est sa « valeur sans le signe ».
Elle est toujours positive ou nulle.
Par exemple : $|3| = 3$ et $|-3| = 3$.

Agrandissement ou réduction

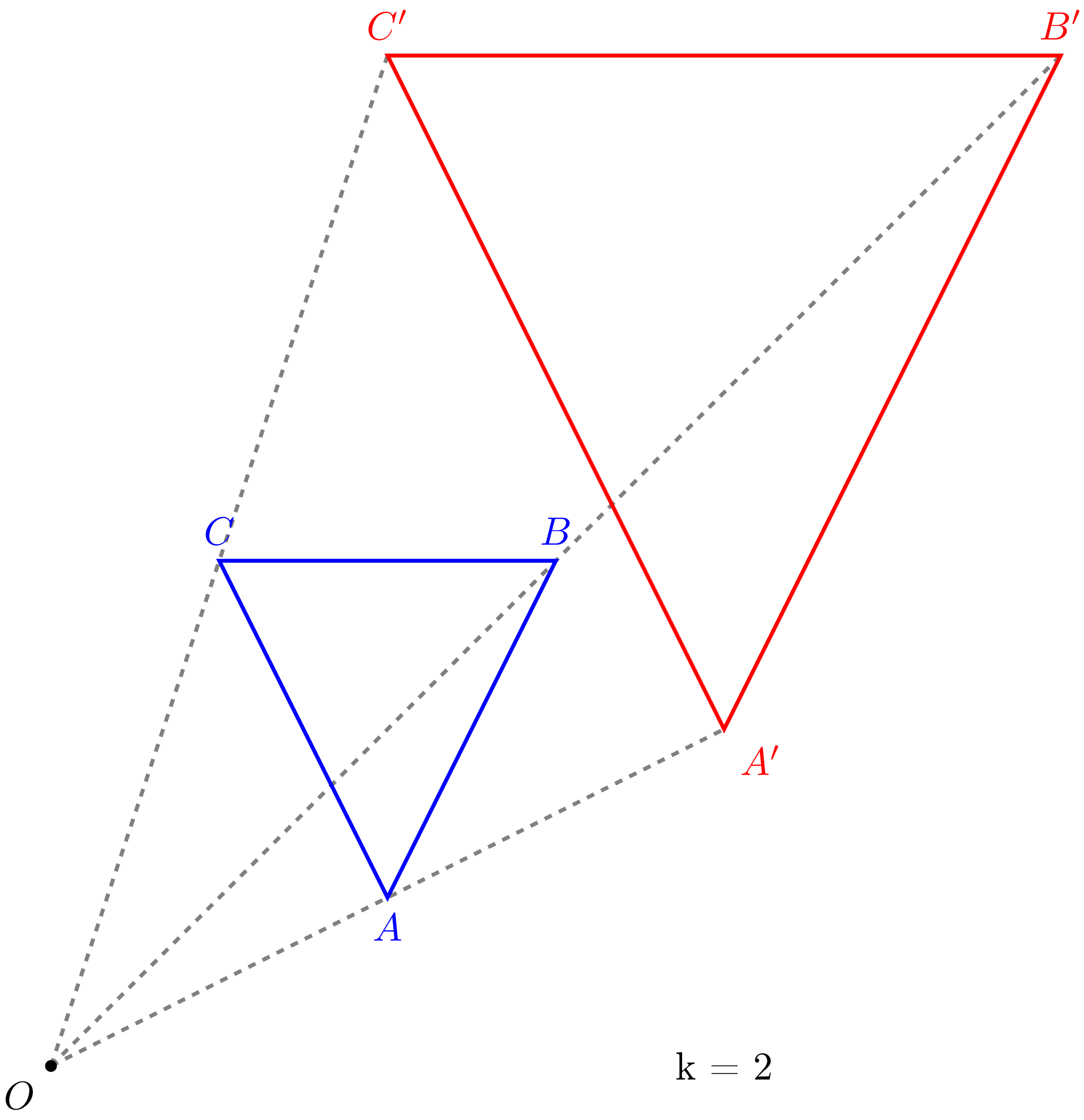
- **Si** $|k| > 1$: c'est un **agrandissement**.
- **Si** $|k| < 1$: c'est une **réduction**.
- **Si** $|k| = 1$: les longueurs sont conservées.

Cas particuliers

- Si $k = 1$: l'homothétie est l'**identité** (chaque point est sa propre image).
- Si $k = -1$: l'homothétie est la **symétrie centrale** de centre O.

Exemple

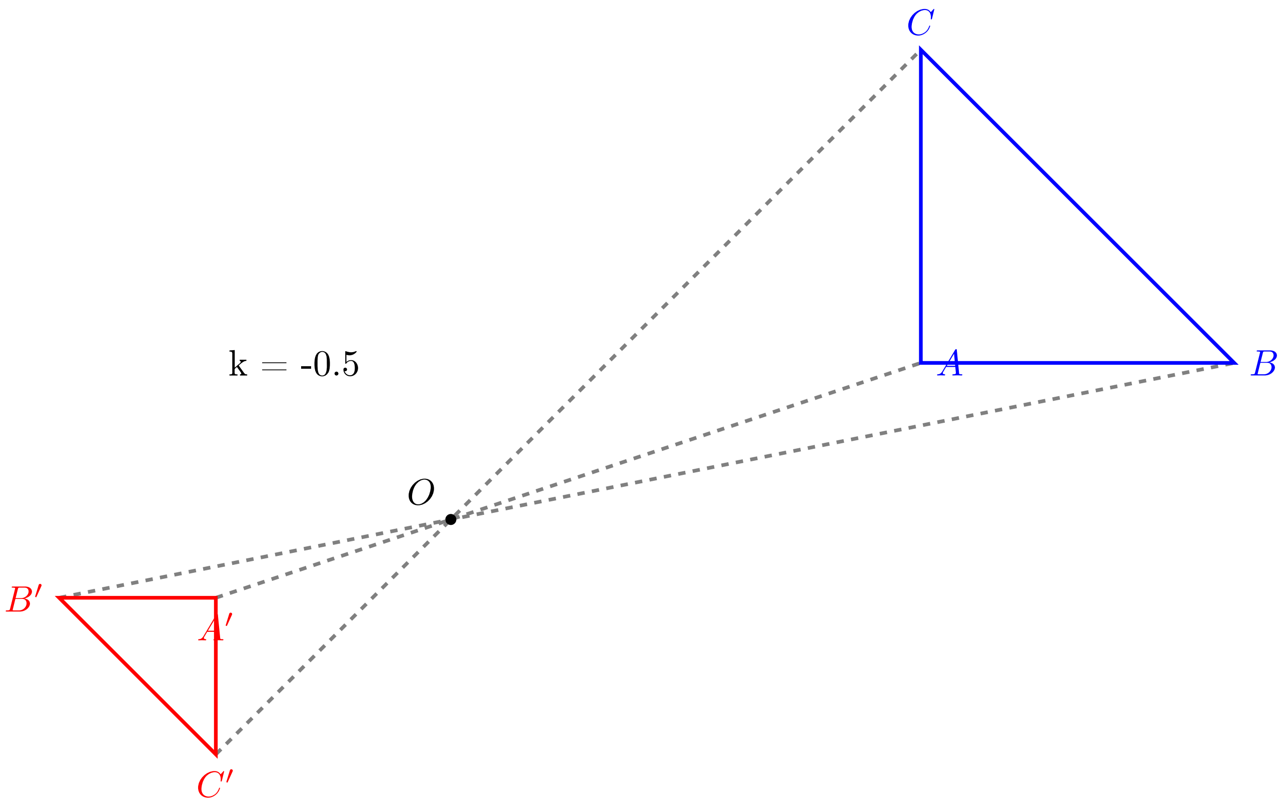
Cas 1 : Rapport positif ($k = 2$). C'est un agrandissement de facteur 2.



Homothétie de centre O et de rapport $k = 2$

Exemple

Cas 2 : Rapport négatif ($k = -0{,}5$). C'est une réduction de facteur $0{,}5$ avec retournement.



Homothétie de centre O et de rapport $k = -0{,}5$

C. Construction de l'image d'un point

Construire l'image d'un point par homothétie

Pour construire l'image M' du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k :

1. Tracer la demi-droite $[OM)$.
2. Calculer la longueur $OM' = |k| \times OM$.
3. Placer M' sur cette demi-droite à la distance OM' de O :
4. si $k > 0$: M' est du même côté que M par rapport à O ;
5. si $k < 0$: M' est de l'autre côté de O.

Exemple

Construction avec $k = 2$ et $OM = 1{,}5$ cm

On trace la demi-droite $[OM)$.

On calcule : $OM' = 2 \times 1{,}5 = 3$ cm.

Comme $k = 2 > 0$, on place M' sur $[OM)$, à 3 cm de O, du même côté que M.

D. Lien avec le théorème de Thalès

Une configuration de Thalès est une situation d'homothétie.

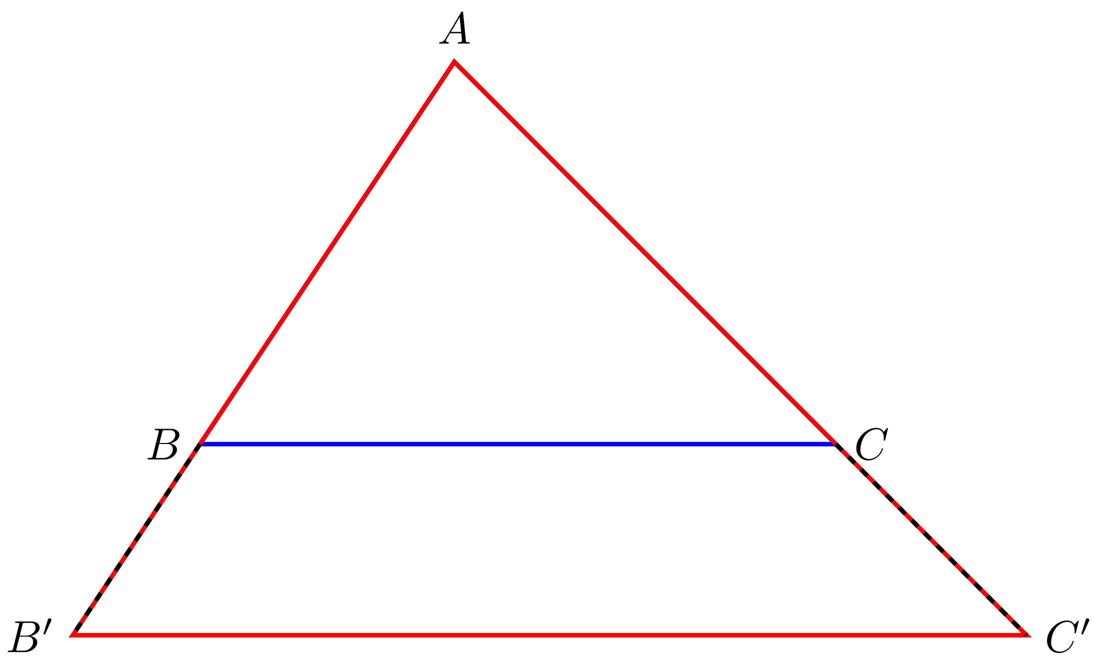
- La configuration « triangles emboîtés » correspond à un rapport positif.
- La configuration « papillon » correspond à un rapport négatif.

Exemple

Théorème de Thalès et Homothétie

Dans la figure ci-dessous, le triangle $AB'C'$ est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A.

Les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.



Le triangle $AB'C'$ est « homothétique » au triangle ABC

3. Propriétés des homothéties

Les homothéties conservent certaines propriétés géométriques mais modifient les grandeurs.

Propriétés de conservation

L'homothétie conserve :

- L'alignement des points.
- Les **mesures d'angles** (un angle de 30° reste de 30°).
- Le parallélisme (l'image d'une droite est une droite parallèle).

Effet sur les grandeurs

Pour une homothétie de rapport k :

1. Les **longueurs** sont multipliées par $|k|$.
2. Les **aires** sont multipliées par k^2.
3. Les **volumes** sont multipliés par $|k|^3$.

Remarque

Puisque $k^2 = |k|^2$ quel que soit le signe de k, le coefficient multiplicateur des aires est toujours positif.

Exemple

On agrandit un carré de côté 3 cm avec un rapport $k = 2$.

- **Nouveau côté** : $3 \times 2 = 6$ cm.
- **Ancienne aire** : $3^2 = 9$ cm².
- **Nouvelle aire** : $6^2 = 36$ cm².

On vérifie bien que l'aire a été multipliée par $k^2 = 2^2 = 4$ (soit $9 \times 4 = 36$).

Image d'un cercle

L'image d'un cercle de centre C et de rayon r par une homothétie de rapport k est un cercle de centre C' (image de C) et de rayon $|k| \times r$.

Exemple

Un cercle de rayon 4 cm est transformé par une homothétie de rapport $k = 0{,}5$.
Le rayon de l'image est : $|0{,}5| \times 4 = 2$ cm.
L'aire du disque image est multipliée par $k^2 = 0{,}25$: si l'aire initiale est $\pi \times 4^2 = 16\pi$ cm², alors l'aire de l'image est $16\pi \times 0{,}25 = 4\pi$ cm².

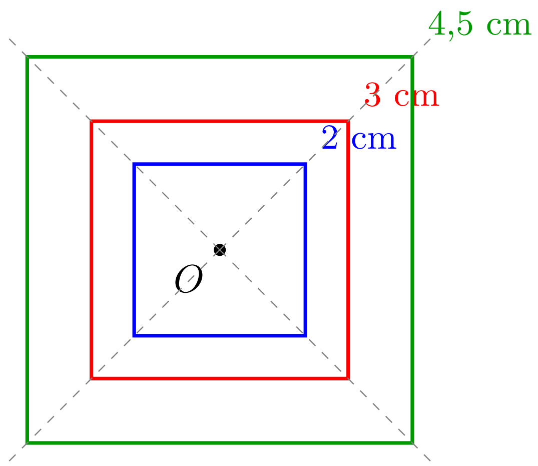
4. Homothéties dans les frises et rosaces

On peut identifier des homothéties dans de nombreuses figures géométriques du quotidien : frises décoratives, pavages, rosaces, logos, plans d'architecte, etc.

Exemple

Carrés emboîtés

Lorsqu'on dessine des carrés de plus en plus grands ayant le même centre O, chaque carré est l'image du précédent par une homothétie de centre O.



Si le côté du premier carré est 2 cm et celui du deuxième est 3 cm, le rapport de l'homothétie est $k = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

On peut vérifier : le troisième carré a un côté de $3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ cm.

Remarque

Savoir repérer une homothétie dans une figure permet d'en déduire des longueurs ou des aires sans avoir à tout mesurer : il suffit de connaître le rapport k.

Les questions essentielles

1. Comment construire l'image d'un point par une homothétie ?

Il faut tracer la demi-droite depuis le centre O passant par le point M, calculer la distance $OM' = |k| \times OM$, puis placer M' du bon côté selon le signe de k.

Voir la fiche méthode : Construire l'image d'un point par une homothétie

2. Comment déterminer le rapport d'une homothétie ?

On calcule le quotient des distances au centre : $k = \dfrac{OM'}{OM}$. Le signe dépend de la position des points par rapport au centre O.

Voir la fiche méthode : Déterminer le rapport d'une homothétie

3. Comment calculer des longueurs après une homothétie ?

Toutes les longueurs de la figure image sont obtenues en multipliant les longueurs d'origine par $|k|$.

Voir la fiche méthode : Calculer des longueurs dans une homothétie

4. Comment calculer l'aire d'une figure après un agrandissement ou une réduction ?

L'aire de la figure image est obtenue en multipliant l'aire d'origine par k^2 (et non par k).

Voir la fiche méthode : Calculer une aire après un agrandissement ou une réduction

5. Comment savoir si une homothétie est un agrandissement ou une réduction ?

On compare la valeur absolue $|k|$ à 1 : si $|k| > 1$ c'est un agrandissement, si $|k| < 1$ c'est une réduction. Le signe de k indique seulement la position de l'image.

Voir la fiche méthode : Déterminer si une homothétie est un agrandissement ou une réduction

Télécharger en PDF