

Solides et volumes

DURÉE ESTIMÉE

35 minutes



OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer un volume ou une aire en situation

Déterminer la section d'un solide par un plan

Calculer le volume d'un solide composé

Utiliser un agrandissement ou une réduction

Se repérer sur une sphère avec la latitude et la longitude

Calculer une distance sur une sphère

Représenter un solide en perspective, par ses vues et par son patron

1 - La sphère et la boule

1.1 Définitions

Sphère

La **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.

Boule

La **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$.

Remarque

La sphère est la surface (comme la peau d'une orange), la boule est le solide plein (comme une bille). Tout point de la sphère est à la distance r du centre ; tout point **intérieur** à la boule est à une distance inférieure ou égale à r du centre.

1.2 Diamètre et grand cercle

Diamètre et points diamétralement opposés

- Un **diamètre** d'une sphère est un segment joignant deux points de la sphère et passant par le centre. Sa longueur vaut $2r$.
- Deux points de la sphère sont dits **diamétralement opposés** si le segment qui les relie est un diamètre.

Grand cercle

Un **grand cercle** d'une sphère est un cercle tracé sur la sphère ayant le même centre et le même rayon que la sphère. C'est le plus grand cercle que l'on puisse tracer sur la sphère.

Exemple

On considère une sphère de centre O et de rayon 5 cm. Le point A est sur la sphère, donc $OA = 5$ cm. Le point B est diamétralement opposé à A : on a $AB = 2 \times 5 = 10$ cm et O est le milieu de $[AB]$.

2 - Se repérer sur une sphère : latitude et longitude

Remarque

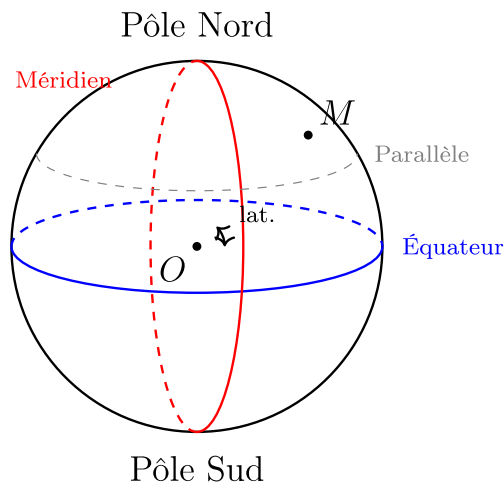
La Terre peut être assimilée à une sphère. On repère un lieu sur la Terre grâce à deux coordonnées : la **latitude** et la **longitude**.

Méridiens et parallèles

- Les **méridiens** sont des demi-grands cercles reliant le pôle Nord au pôle Sud. Le méridien de référence (0°) est le **méridien de Greenwich**.
- Les **parallèles** sont des cercles tracés sur la sphère dans des plans parallèles au plan de l'équateur. L'**équateur** est le seul parallèle qui soit un grand cercle (latitude 0°).

Latitude et longitude

- La **latitude** d'un lieu est l'angle entre le plan de l'équateur et la droite reliant le centre de la Terre à ce lieu. Elle se mesure de 0° à 90° **Nord** (N) ou **Sud** (S).
- La **longitude** d'un lieu est l'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien passant par ce lieu. Elle se mesure de 0° à 180° **Est** (E) ou **Ouest** (O).



💡 Exemple

Paris se situe approximativement à 49° N de latitude et 2° E de longitude. Cela signifie :

- Paris est à 49° au nord de l'équateur.
- Paris est à 2° à l'est du méridien de Greenwich.

Sydney (Australie) se situe à environ 34° S de latitude et 151° E de longitude : 34° au sud de l'équateur et 151° à l'est du méridien de Greenwich.

📌 Remarque

- Tous les points situés sur un même parallèle ont la même latitude.
- Tous les points situés sur un même méridien ont la même longitude.
- L'équateur a pour latitude 0° . Le pôle Nord a pour latitude 90° N. Le pôle Sud a pour latitude 90° S.

3 - Sections de solides

3.1 Section d'une sphère par un plan

Propriété

La section d'une sphère par un plan est un **cercle**.

- Si le plan passe par le centre de la sphère, la section est un **grand cercle** (de même rayon que la sphère).
- Si le plan ne passe pas par le centre, la section est un cercle de rayon plus petit que celui de la sphère.
- Si le plan est tangent à la sphère (il la touche en un seul point), la section est réduite à un point.

Remarque

Pour calculer le rayon de la section, on utilise le théorème de Pythagore. Si la sphère a pour centre O et pour rayon R , et si le plan coupe la sphère en un cercle de centre I et de rayon r , alors le triangle OIM est rectangle en I (où M est un point du cercle de section) et :

$$OI^2 + r^2 = R^2$$

Exemple

Une sphère de centre O et de rayon 5 cm est coupée par un plan situé à 3 cm du centre. Calculer le rayon de la section.

On note I le centre du cercle de section et M un point de ce cercle. Le triangle OIM est rectangle en I avec $OM = 5$ cm et $OI = 3$ cm.

D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OI^2 + IM^2$$

$$5^2 = 3^2 + IM^2$$

$$25 = 9 + IM^2$$

$$IM^2 = 16$$

$$IM = 4 \text{ cm}$$

Le rayon du cercle de section est de **4 cm**.

3.2 Sections d'un parallélépipède rectangle

Propriété

- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un **rectangle** de mêmes dimensions que cette face.
- La section d'un pavé droit (ou d'un cube) par un plan parallèle à une arête est un **rectangle** dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête.

3.3 Sections d'un cylindre de révolution

Propriété

- La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un **cercle** de même rayon que la base.
- La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un **rectangle**.

3.4 Sections d'une pyramide et d'un cône

Propriété

La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est une **réduction** de la base.

Remarque

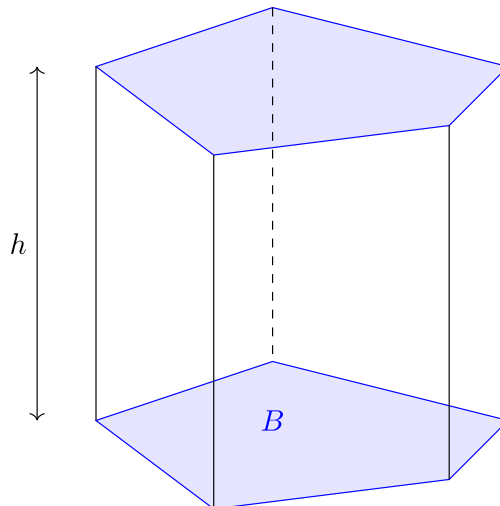
La section d'une pyramide à base carrée par un plan parallèle à la base est un carré. La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un cercle.

4 - Volumes des solides

4.1 Prisme droit

Définition

Un **prisme droit** est un solide ayant deux bases polygonales identiques et dont les faces latérales sont des rectangles.



Propriété

Le volume d'un prisme droit de hauteur h et dont la base a pour aire $\mathcal{B}$ est :

$$V = \mathcal{B} \times h$$

Cas particuliers

- **Pavé droit** (parallélépipède rectangle) de dimensions L , l et h :

$$V = L \times l \times h$$

- **Cube** de côté c : $V = c^3$

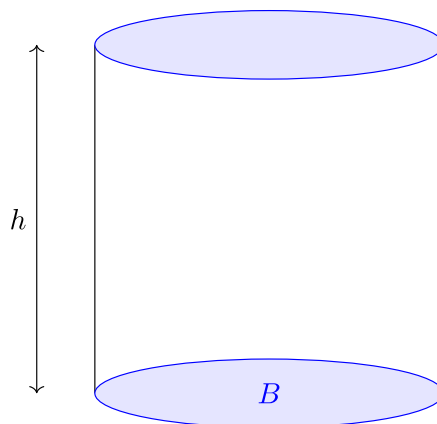
Exemple

Calculer le volume d'un pavé droit de dimensions 8 cm, 5 cm et 3 cm.

$$V = 8 \times 5 \times 3 = 120 \text{ cm}^3$$

Le volume du pavé droit est **120 cm³**.

4.2 Cylindre de révolution



Propriété

Le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon de base R est :

$$V = \pi R^2 \times h$$

Exemple

Calculer le volume d'un cylindre de rayon 4 cm et de hauteur 10 cm.

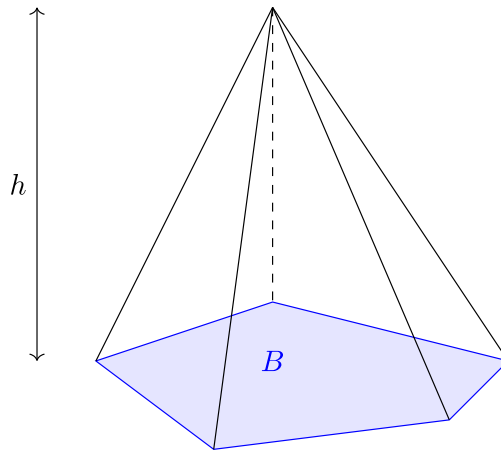
$$V = \pi \times 4^2 \times 10 = \pi \times 16 \times 10 = 160\pi \approx 502,7 \text{ cm}^3$$

Le volume du cylindre est $160\pi \text{ cm}^3$, soit environ $502,7 \text{ cm}^3$.

4.3 Pyramide

Définition

Une **pyramide** est un solide ayant une base polygonale, un sommet et dont les faces latérales sont des triangles.



Propriété

Le volume d'une pyramide de hauteur h et dont la base a pour aire $\mathcal{B}$ est :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

Exemple

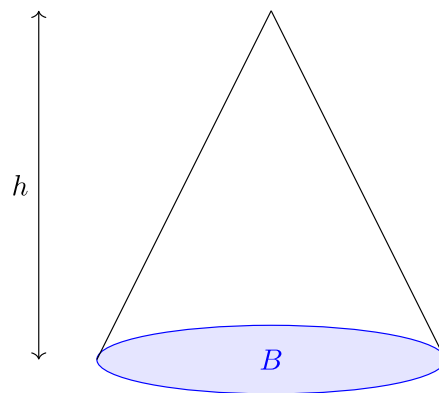
Une pyramide a pour base un carré de côté 6 cm et une hauteur de 9 cm.
Calculer son volume.

L'aire de la base est $\mathcal{B} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$.

$$V = \frac{1}{3} \times 36 \times 9 = \frac{324}{3} = 108 \text{ cm}^3$$

Le volume de la pyramide est **108 cm³**.

4.4 Cône de révolution



🛡️ Propriété

Le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon de base R est :

$$V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$$

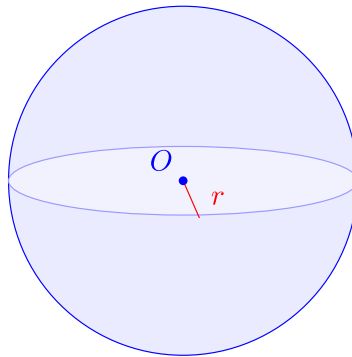
💡 Exemple

Calculer le volume d'un cône de rayon 3 cm et de hauteur 7 cm.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 7 = \frac{1}{3} \times 63\pi = 21\pi \approx 66,0 \text{ cm}^3$$

Le volume du cône est $21\pi \text{ cm}^3$, soit environ $66,0 \text{ cm}^3$.

4.5 Boule



Propriété

Le volume d'une boule de rayon r est :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Exemple

Calculer le volume d'une boule de rayon 6 cm. Donner la valeur exacte puis l'arrondi au cm^3 .

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 216 = \frac{864}{3} \pi = 288\pi \approx 905 \text{ cm}^3$$

Le volume de la boule est $288\pi \text{ cm}^3$, soit environ **905 cm^3** .

5 - Aire d'une sphère

Propriété

L'aire d'une sphère de rayon r est :

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times r^2$$

Remarque

L'aire d'une sphère est exactement égale à quatre fois l'aire du disque de même rayon.

Exemple

Calculer l'aire d'une sphère de rayon 5 cm. Donner la valeur exacte puis l'arrondi au cm^2 .

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 5^2 = 4 \times 25\pi = 100\pi \approx 314,2 \text{ cm}^2$$

L'aire de la sphère est $100\pi \text{ cm}^2$, soit environ **314,2 cm^2** .

6 - Agrandissement et réduction

Agrandissement et réduction

Lorsqu'on multiplie toutes les longueurs d'un solide par un nombre k strictement positif, on obtient :

- un **agrandissement** si $k > 1$
- une **réduction** si $k < 1$

Le nombre k est appelé **rapport** (ou coefficient) d'agrandissement ou de réduction.

Effet sur les aires et les volumes

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k :

- les **longueurs** sont multipliées par k
- les **aires** sont multipliées par k^2
- les **volumes** sont multipliés par k^3

Attention

Multiplier les longueurs par 2 ne double pas le volume : le volume est multiplié par $2^3 = 8$. De même, diviser les longueurs par 3 ne divise pas

l'aire par 3 mais par $3^2 = 9$.

Exemple

Un solide a un volume de 540 cm^3 . On effectue une réduction de rapport $\frac{1}{3}$.

Les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{3}$.

Les aires sont multipliées par $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Les volumes sont multipliés par $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Le volume du solide réduit est :

$$V = 540 \times \frac{1}{27} = 20 \text{ cm}^3$$

Le volume du solide réduit est **20 cm^3** .

Exemple

La pyramide SMNOP est une réduction de la pyramide SABCD. L'aire de la base ABCD est de 36 cm^2 et l'aire de la base MNOP est de 4 cm^2 .

Le rapport des aires est $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Or les aires sont multipliées par k^2 , donc :

$$k^2 = \frac{1}{9}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Le rapport de réduction est $\frac{1}{3}$: toutes les longueurs de la petite pyramide sont trois fois plus petites.

Les questions essentielles

1. Comment calculer le volume d'un solide quand l'énoncé donne le diamètre ou que la hauteur n'est pas directement fournie ?

Il faut d'abord extraire les bonnes données : diviser le diamètre par 2 pour obtenir le rayon, ou calculer la hauteur avec le théorème de Pythagore si seule l'arête latérale est donnée. Ensuite, on applique la formule adaptée au solide et on donne la valeur exacte puis l'arrondi.

Voir la fiche méthode : [Calculer un volume ou une aire en situation](#)

2. Comment déterminer la nature de la section d'un solide par un plan ?

On identifie le solide et la position du plan de coupe. La section d'une sphère par un plan est un cercle (dont le rayon se calcule avec Pythagore). La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base est une réduction de la base.

Voir la fiche méthode : [Déterminer la section d'un solide par un plan](#)

3. Comment calculer le volume d'un solide composé de plusieurs

parties ?

On décompose le solide en solides simples connus, on calcule le volume de chaque partie, puis on additionne les volumes (assemblage) ou on les soustrait (volume non occupé, espace creux).

Voir la fiche méthode : [Calculer le volume d'un solide composé](#)

4. Comment utiliser un agrandissement ou une réduction pour calculer une longueur, une aire ou un volume ?

On identifie le rapport k , puis on applique la bonne puissance : les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 et les volumes par k^3 . On peut aussi retrouver k à partir du rapport de deux aires ou de deux volumes.

Voir la fiche méthode : [Utiliser un agrandissement ou une réduction](#)

5. Comment lire ou placer des coordonnées géographiques sur une sphère ?

La latitude indique la position par rapport à l'équateur (Nord ou Sud, de 0° à 90°) et la longitude indique la position par rapport au méridien de Greenwich (Est ou Ouest, de 0° à 180°). Pour placer un point, on repère l'intersection du parallèle et du méridien correspondants.

Voir la fiche méthode : [Se repérer sur une sphère avec la latitude et la longitude](#)

6. Comment calculer la distance entre deux points sur la Terre ?

Lorsque deux points sont sur le même méridien (ou sur l'équateur), on calcule l'angle entre eux (différence de latitudes si même hémisphère, somme si hémisphères différents), puis on applique la formule de longueur d'arc : $L = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$ avec $R = 6\,371$ km.

Voir la fiche méthode : [Calculer une distance sur une sphère](#)

7. Comment représenter un solide en perspective, par ses vues ou par son patron ?

On dessine la face avant en vraie grandeur, on trace des fuyantes parallèles et réduites, et on met en pointillés les arêtes cachées. Les vues (de face, de dessus, de côté) sont les figures planes vues sous chaque direction, et le patron regroupe toutes les faces à plat, sans chevauchement.

Voir la fiche méthode : [Représenter un solide en perspective, par ses vues et par son patron](#)

