

# Fonctions affines

DURÉE ESTIMÉE

20 minutes

## OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer l'image ou l'antécédent par une fonction affine

Tracer la représentation graphique d'une fonction affine

Comparer deux fonctions affines

Les fonctions linéaires, étudiées au chapitre précédent, modélisent les situations de proportionnalité. Les fonctions affines les généralisent en ajoutant une constante : elles permettent de modéliser de nombreuses situations du quotidien (tarifs avec abonnement, conversions de températures, etc.).

# 1 - Définition et vocabulaire

## Fonction affine

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels donnés.

On appelle **fonction affine** la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \longmapsto ax + b$$

Le nombre  $a$  est le **coefficient directeur** et le nombre  $b$  est l'**ordonnée à l'origine**.

## Cas particuliers

- Si  $b = 0$ , on retrouve la fonction linéaire  $f(x) = ax$  (chapitre précédent).
- Si  $a = 0$ , la fonction est constante :  $f(x) = b$  pour tout  $x$ .

Les fonctions linéaires sont donc des cas particuliers de fonctions affines.

## Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -3x + 5$ .

C'est une fonction affine avec  $a = -3$  (coefficient directeur) et  $b = 5$  (ordonnée à l'origine).

**Calcul d'image** : on calcule  $f(4)$  :

$$f(4) = -3 \times 4 + 5 = -12 + 5 = -7$$

L'image de 4 par  $f$  est  $-7$ .

**Calcul d'antécédent** : on cherche  $x$  tel que  $f(x) = -1$  :

$$-3x + 5 = -1$$

$$-3x = -1 - 5$$

$$-3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Le nombre 2 est l'antécédent de  $-1$  par  $f$ .

## 2 - Représentation graphique

### Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$  est une droite.

### Remarque

Le point  $(0; b)$  appartient toujours à cette droite car  $f(0) = a \times 0 + b = b$ .

C'est le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, d'où le nom **ordonnée à l'origine**.

Pour tracer cette droite, il suffit de calculer les images de deux valeurs de  $x$  pour obtenir deux points.

### Appartenance d'un point à une droite

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine et  $(d)$  sa représentation graphique.

Un point  $M(x_M; y_M)$  appartient à la droite  $(d)$  si et seulement si  $y_M = ax_M + b$ .

### Exemple

On considère la fonction  $f : x \mapsto 3x - 2$ .

Le point  $A(2; 4)$  appartient-il à la droite représentant  $f$  ?

On calcule  $f(2) = 3 \times 2 - 2 = 4$ . Comme  $y_A = 4 = f(2)$ , le point  $A$  appartient bien à la droite.

Le point  $B(1; 3)$  appartient-il à cette droite ?

On calcule  $f(1) = 3 \times 1 - 2 = 1$ . Or  $y_B = 3 \neq 1$ , donc le point  $B$  n'appartient pas à la droite.

## Parallélisme

La droite représentant la fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$  est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire  $g : x \mapsto ax$ .

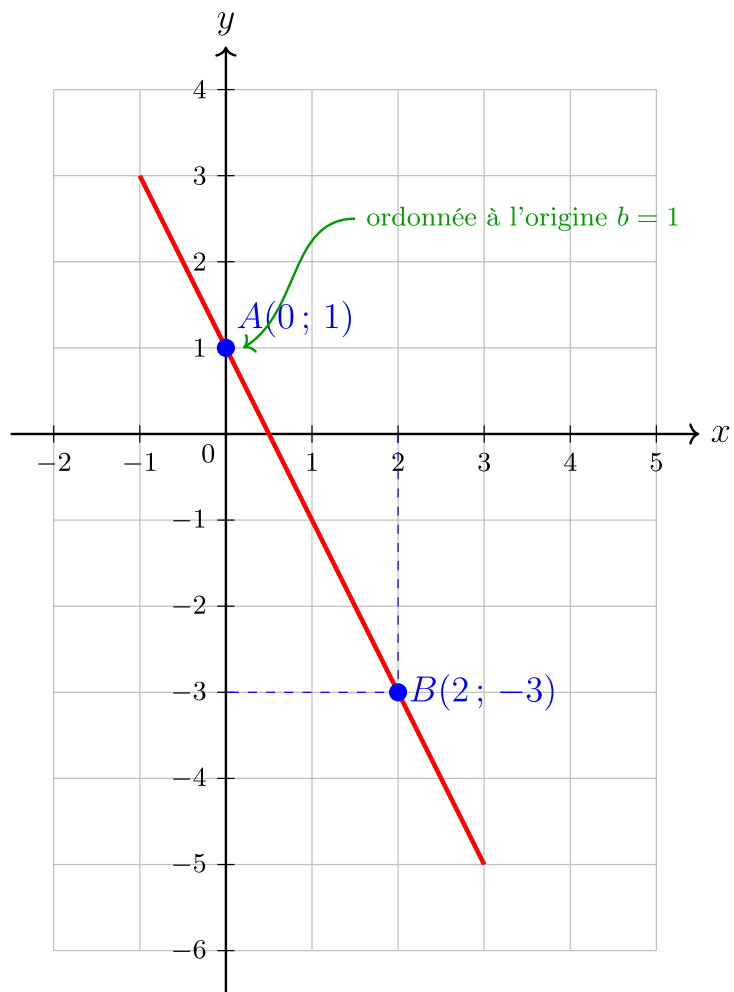
En effet, ces deux droites ont le même coefficient directeur  $a$ . La droite de  $f$  s'obtient en « décalant » verticalement la droite de  $g$  de  $b$  unités.

## Exemple

On veut tracer la représentation graphique de la fonction  $f : x \mapsto -2x + 1$ .

- $f(0) = -2 \times 0 + 1 = 1$ , donc la droite passe par le point  $A(0; 1)$ .
- $f(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$ , donc la droite passe par le point  $B(2; -3)$ .

On trace la droite passant par  $A$  et  $B$  :



*Représentation graphique de la fonction affine  $f(x) = -2x + 1$*

# 3 - Coefficient directeur et sens de variation

## Proportionnalité des accroissements

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine.

Pour tous nombres réels  $x_1$  et  $x_2$ , les accroissements de  $x$  et de  $f(x)$  sont proportionnels :

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

Le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur  $a$ .

**Démonstration :**

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$$

## Théorème

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine.

Pour tous nombres réels distincts  $x_1$  et  $x_2$ , le coefficient directeur  $a$  est donné par :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

## Remarque

Cette formule permet de retrouver le coefficient directeur  $a$  à partir de deux valeurs connues de la fonction, par exemple lues sur un graphique ou données dans un énoncé.

## Lire graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine

À partir de la représentation graphique d'une fonction affine :

- L'**ordonnée à l'origine**  $b$  se lit directement : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées (le point d'abscisse 0).
- Le **coefficient directeur**  $a$  se détermine en choisissant deux points  $A$  et  $B$  de la droite et en calculant :  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

En pratique, on repère sur le graphique de combien l'ordonnée varie quand l'abscisse augmente de 1 : cette variation est égale à  $a$ .

## Exemple

Sur le graphique de l'exemple précédent, la droite coupe l'axe des ordonnées au point  $(0; 1)$ , donc  $b = 1$ .

Pour trouver  $a$ , on utilise les points  $A(0; 1)$  et  $B(2; -3)$  :

$$a = \frac{-3 - 1}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

On retrouve bien  $f(x) = -2x + 1$ .

### Exercice corrigé

**Déterminer la fonction affine  $f$  telle que  $f(2) = 1$  et  $f(5) = 7$ .**

La fonction  $f$  est affine, donc de la forme  $f(x) = ax + b$ .

On calcule le coefficient directeur  $a$  à l'aide de la formule :

$$a = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

On a donc  $f(x) = 2x + b$ .

Pour trouver  $b$ , on utilise le fait que  $f(2) = 1$  :

$$2 \times 2 + b = 1$$

$$4 + b = 1$$

$$b = 1 - 4$$

$$b = -3$$

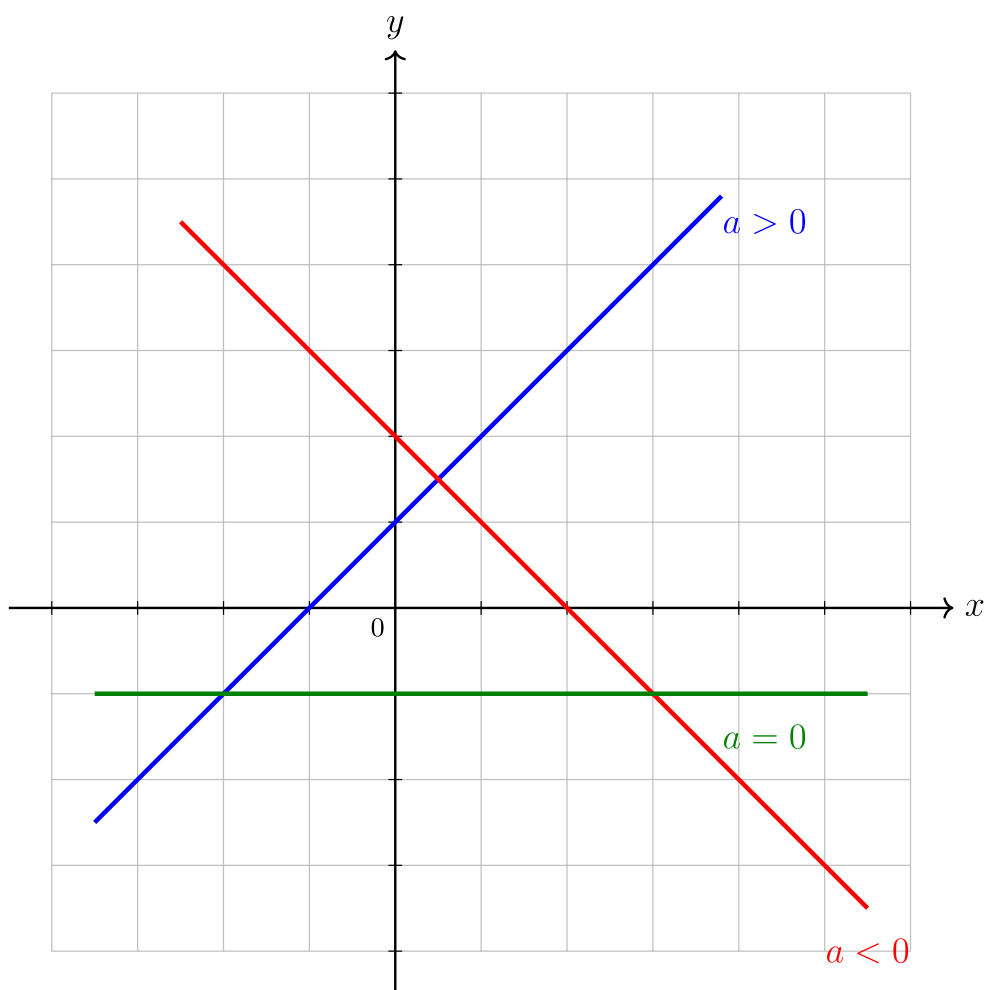
Par conséquent, la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = 2x - 3$ .

**Vérification :**  $f(5) = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$ , ce qui est bien le résultat attendu.

## Sens de variation

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine.

- Si  $a > 0$ , la fonction  $f$  est **strictement croissante** (la droite « monte »).
- Si  $a < 0$ , la fonction  $f$  est **strictement décroissante** (la droite « descend »).
- Si  $a = 0$ , la fonction  $f$  est **constante** (la droite est horizontale).



*Influence du signe de  $a$  sur le sens de variation d'une fonction affine*

### Exemple

La fonction  $g : x \mapsto 4x - 7$  a un coefficient directeur  $a = 4 > 0$ , donc  $g$  est strictement croissante.

La fonction  $h : x \mapsto -0,5x + 3$  a un coefficient directeur  $a = -0,5 < 0$ , donc  $h$  est strictement décroissante.

## Les questions essentielles

### 1. Comment calculer l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ?

Pour calculer l'image, on remplace  $x$  par le nombre dans l'expression  $ax + b$ . Pour trouver un antécédent, on résout l'équation  $ax + b = k$ .

Voir la fiche méthode : [Calculer l'image ou l'antécédent par une fonction affine](#)

### 2. Comment tracer la représentation graphique d'une fonction affine ?

On peut calculer les images de deux nombres pour obtenir deux points, ou utiliser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur pour construire la droite directement.

Voir la fiche méthode : [Tracer la représentation graphique d'une fonction affine](#)

### 3. Comment déterminer l'expression d'une fonction affine ?

Graphiquement, on lit l'ordonnée à l'origine puis on calcule le coefficient directeur avec deux points. Par le calcul, on utilise la formule  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  puis on trouve  $b$ .

### 4. Comment comparer deux fonctions affines et trouver leur point d'intersection ?

On résout l'équation  $f(x) = g(x)$  pour trouver le point d'intersection. Pour savoir quand  $f(x) \geq g(x)$ , on résout l'inéquation correspondante ou on lit graphiquement quelle droite est au-dessus.

Voir la fiche méthode : [Comparer deux fonctions affines](#)

📄 Télécharger en PDF