

# Fonction linéaire – Proportionnalité

DURÉE ESTIMÉE

**20 minutes**

La fonction linéaire est la traduction algébrique de la proportionnalité. Ce chapitre formalise les notions vues depuis le début du collège en introduisant un nouvel outil : la fonction.

## 1. Définition et lien avec la proportionnalité

Une situation de proportionnalité existe lorsque l'on passe d'une grandeur à une autre en multipliant toujours par un même nombre constant.

## Fonction linéaire

Soit  $a$  un nombre réel donné.

On appelle **fonction linéaire** de coefficient  $a$ , la fonction  $f$  qui, à tout nombre  $x$ , associe le nombre  $a \times x$ .

On note :

$$f : x \longmapsto ax$$

ou

$$f(x) = ax$$

## Remarque

- Le nombre  $x$  est l'**antécédent** (la grandeur de départ).
- Le nombre  $f(x)$  est l'**image** (la grandeur d'arrivée).
- Le coefficient  $a$  correspond exactement au **coefficient de proportionnalité** du tableau de valeurs associé.

## Propriétés immédiates

Soit  $f$  une fonction linéaire de coefficient  $a$ .

- L'image de 0 est toujours 0 :  $f(0) = a \times 0 = 0$ .
- L'image de 1 est le coefficient  $a$  :  $f(1) = a \times 1 = a$ .

### Exemple

On achète des pommes à 3 € le kilogramme. Le prix est proportionnel à la masse.

- Si on note  $x$  la masse en kg.
- Le prix à payer est modélisé par la fonction linéaire  $p$  définie par :

$$p(x) = 3x$$

- Le coefficient de la fonction est **3** (prix unitaire).
- L'image de 5 est  $p(5) = 3 \times 5 = 15$ . Cela signifie que 5 kg coûtent 15 €.

## 2. Représentation graphique

Il existe une équivalence stricte entre fonction linéaire, proportionnalité et alignement avec l'origine.

### Alignement avec l'origine

Dans un repère du plan :

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite** qui passe par l'**origine** du repère.
- Réciproquement, toute droite qui passe par l'origine du repère (non verticale) représente une fonction linéaire.

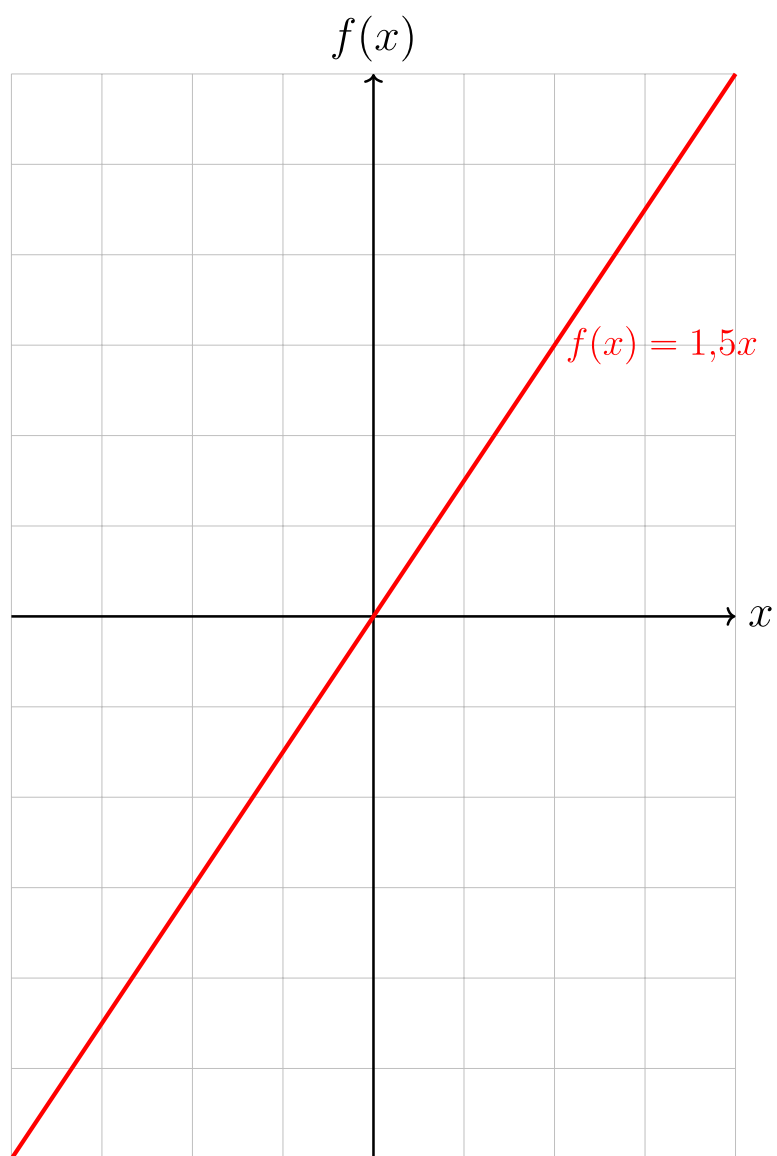
## Coefficient directeur

Le coefficient  $a$  est appelé **coefficient directeur** de la droite. Il indique la "pente" ou l'inclinaison de la droite :

- Si  $a > 0$ , la droite "monte" (la fonction est croissante).
- Si  $a < 0$ , la droite "descend" (la fonction est décroissante).

## Exemple

Représentation de la fonction  $f(x) = 1,5x$ .

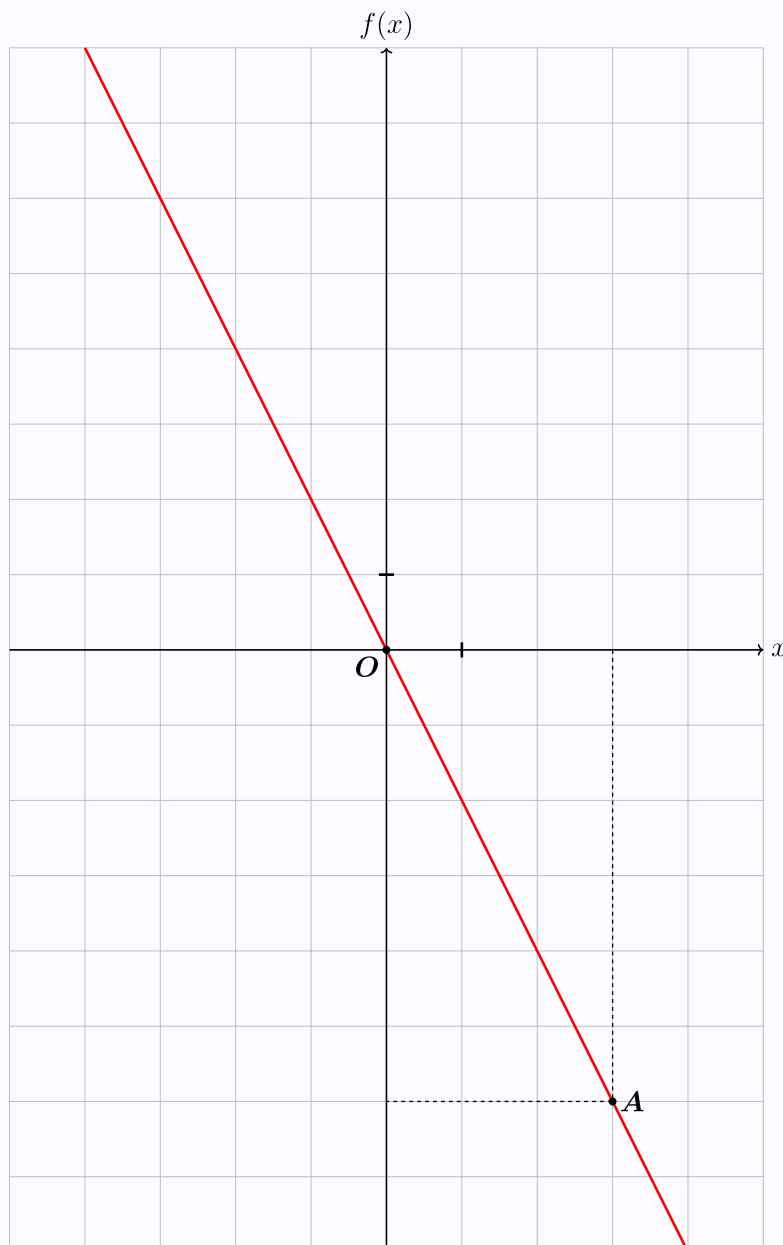


*Graphique de la fonction linéaire  $f(x) = 1,5x$*

## Tracer une fonction linéaire

Pour tracer la droite  $(d)$  représentant la fonction  $f(x) = ax$  :

1. On place le point  $O(0; 0)$  car la droite passe toujours par l'origine.
2. On choisit une valeur pour  $x$  (non nulle) et on calcule son image  $f(x)$  pour obtenir un deuxième point.
3. On trace la droite passant par ces deux points.



**Exemple :** Tracer la représentation de  $f(x) = -2x$ .

- Point 1 : L'origine  $O(0; 0)$ .
- Point 2 : Si  $x = 3$ , alors  $f(3) = -2 \times 3 = -6$ . On place le point  $A(3; -6)$ .
- On trace la droite  $(OA)$ .

### 3. Déterminer une fonction linéaire

Retrouver l'expression d'une fonction linéaire revient à calculer un coefficient de proportionnalité à partir d'un couple de valeurs.

#### Calcul du coefficient

Si  $f$  est une fonction linéaire et si l'on connaît un nombre non nul  $x_0$  et son image  $f(x_0)$ , alors le coefficient  $a$  se calcule par la formule :

$$a = \frac{\text{image}}{\text{antécédent}} = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

#### Exemple

On cherche la fonction linéaire  $g$  telle que l'image de 4 soit 12 (noté  $g(4) = 12$ ).

1. On sait que  $g$  est linéaire, donc de la forme  $g(x) = ax$ .

2. On applique la formule :  $a = \frac{g(4)}{4} = \frac{12}{4} = 3$ .

3. Conclusion : La fonction est définie par  $g(x) = 3x$ .

### 🕒 Lecture graphique

Sur la représentation graphique d'une fonction linéaire, on peut lire directement les images et les antécédents :

- Pour trouver l'**image** d'un nombre  $x_0$  : on repère  $x_0$  sur l'axe des abscisses, on monte (ou descend) verticalement jusqu'à la droite, puis on lit l'ordonnée correspondante sur l'axe des ordonnées.
- Pour trouver l'**antécédent** d'un nombre  $y_0$  : on repère  $y_0$  sur l'axe des ordonnées, on se déplace horizontalement jusqu'à la droite, puis on lit l'abscisse correspondante.

## 4. Modélisation et Pourcentages

Les fonctions linéaires sont l'outil mathématique privilégié pour traiter les pourcentages d'évolution (soldes, augmentations).

## Pourcentages et fonctions

- **Prendre**  $t\%$  d'un nombre  $x$  revient à calculer :  $f(x) = \frac{t}{100}x$ .
- **Augmenter** un nombre  $x$  de  $t\%$  revient à le multiplier par le coefficient  $1 + \frac{t}{100}$ .

La fonction linéaire associée est :

$$f(x) = \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$$

- **Diminuer** un nombre  $x$  de  $t\%$  revient à le multiplier par le coefficient  $1 - \frac{t}{100}$ .

La fonction linéaire associée est :

$$f(x) = \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$$

## Cas d'une réduction (Solde)

Un magasin applique une réduction de 20 % sur tous les articles.

On note  $x$  le prix initial.

1. Le coefficient multiplicateur est  $1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$ .
2. La fonction linéaire modélisant le prix soldé est  $p(x) = 0,8x$ .
3. Pour un article à 50 €, le prix soldé est  $p(50) = 0,8 \times 50 = 40$  €.

### 1. Comment calculer l'image d'un nombre par une fonction linéaire ?

On remplace  $x$  par la valeur donnée dans l'expression  $f(x) = ax$  et on effectue la multiplication.

Voir la fiche méthode : [Calculer l'image ou l'antécédent par une fonction linéaire](#) ↗

### 2. Comment retrouver un antécédent par une fonction linéaire ?

On pose l'équation  $ax = y$  puis on divise par le coefficient  $a$  pour obtenir  $x = \frac{y}{a}$ .

Voir la fiche méthode : [Calculer l'image ou l'antécédent par une fonction linéaire](#) ↗

### 3. Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ?

On place l'origine  $O(0; 0)$ , on calcule un deuxième point en choisissant une valeur de  $x$  simple, puis on trace la droite passant par ces deux points.

Voir la fiche méthode : [Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire](#) ↗

#### 4. Comment trouver le coefficient d'une fonction linéaire ?

On divise l'image par l'antécédent :  $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$ . Il suffit de connaître un couple (antécédent ; image) avec l'antécédent non nul.

Voir la fiche méthode : [Déterminer l'expression d'une fonction linéaire](#) ↗

#### 5. Comment lire graphiquement une image ou un antécédent ?

Pour une image, on part de l'axe des abscisses et on projette sur la droite puis sur l'axe des ordonnées. Pour un antécédent, on fait le chemin inverse.

Voir la fiche méthode : [Lire graphiquement une image ou un antécédent](#) ↗

## 6. Comment appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution ?

On calcule le coefficient multiplicateur ( $1 + \frac{t}{100}$  pour une augmentation,  $1 - \frac{t}{100}$  pour une diminution) puis on multiplie la valeur initiale par ce coefficient.

Voir la fiche méthode : [Appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution ↗](#)