ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

COURS

Équations et Inéquations

DURÉE ESTIMÉE

10 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Résoudre une équation du premier degré
- Résoudre une équation produit-nul
- Résoudre une inéquation du premier degré
- Mettre un problème en équation ou en inéquation

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, souvent désigné par une lettre (généralement x), appelée l'**inconnue**. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles de x pour que l'égalité soit vraie.

1. Équations du premier degré

Propriétés fondamentales

Pour résoudre une équation, on cherche à « isoler » l'inconnue x. On utilise deux règles qui ne changent pas les solutions d'une équation :

1. **Addition/Soustraction** : On peut ajouter ou retrancher le même nombre aux deux membres de l'égalité.
2. **Multiplication/Division** : On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **non nul**.

Unicité de la solution

Une équation du premier degré à une inconnue de la forme $ax + b = cx + d$ (avec $a \neq c$) admet **une solution et une seule**.

Résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$

Objectif : Trouver la valeur de x.

Méthode :

1. **Regrouper** les termes en x d'un côté (souvent à gauche) et les nombres constants de l'autre (à droite).
2. **Réduire** chaque membre.
3. **Isoler** x en divisant par son coefficient.

Exemple : Résoudre $5x - 8 = 2x + 4$

1. On regroupe les x à gauche (on soustrait $2x$) :
   $5x - 2x - 8 = 4 \iff 3x - 8 = 4$
2. On regroupe les nombres à droite (on ajoute 8) :
   $3x = 4 + 8 \iff 3x = 12$
3. On isole x (on divise par 3) :
   $x = \dfrac{12}{3} = 4$

Conclusion : La solution est 4.

Égalité de deux quotients (produit en croix)

Lorsqu'une équation se présente comme une égalité de deux quotients, on peut se ramener à une équation sans dénominateur grâce au produit en croix.

Si $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.

Exemple

Résoudre $\dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{x+4}{2}$.

On applique le produit en croix :

$$2 \times (2x+1) = 3 \times (x+4)$$

On développe puis on résout cette équation du premier degré :

$4x + 2 = 3x + 12 \iff 4x - 3x = 12 - 2 \iff x = 10$

La solution est 10.

2. Équations produit-nul

Propriété du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Résoudre une équation produit-nul

Exemple : Résoudre $(2x+3)(x-5)=0$.

1. On identifie un produit nul.
2. On applique la propriété : « Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul ».
3. Cela revient à résoudre deux petites équations :
4. Soit $2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=-\frac{3}{2}$
5. Soit $x-5=0 \iff x=5$
6. **Conclusion :** L'équation admet deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et 5.

Remarque

Si l'équation n'est pas sous forme factorisée, il faut généralement factoriser pour se ramener à un produit nul. On utilise parfois l'identité remarquable

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Exemple : Résoudre $x^2 - 16 = 0$.

On reconnaît la forme $a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$:

$x^2 - 16 = 0 \iff (x-4)(x+4) = 0$

On applique la propriété du produit nul :

- Soit $x - 4 = 0 \iff x = 4$
- Soit $x + 4 = 0 \iff x = -4$

L'équation admet deux solutions : 4 **et** -4.

3. L'équation $x^2 = a$

Résolution de $x^2 = a$

Selon le signe de a, les solutions diffèrent :

- Si $a < 0$: L'équation n'a **aucune solution** (un carré est toujours positif).
- Si $a = 0$: L'équation a une seule solution, $x = 0$.
- Si $a > 0$: L'équation admet **deux solutions** opposées : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple

- $x^2 = -9$: Pas de solution.
- $x^2 = 25$: Deux solutions, $\sqrt{25} = 5$ et $-\sqrt{25} = -5$.

4. Inéquations du premier degré

Définition

Une **inéquation** est une inégalité ($<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$) contenant une inconnue.

Résoudre une inéquation, c'est trouver **tous** les nombres qui la vérifient.

Règles de résolution et signe négatif

Les règles sont les mêmes que pour les équations, **SAUF** une exception très importante :
Quand on multiplie ou divise par un nombre NÉGATIF, on doit INVERSER le sens de l'inégalité.

Exemple

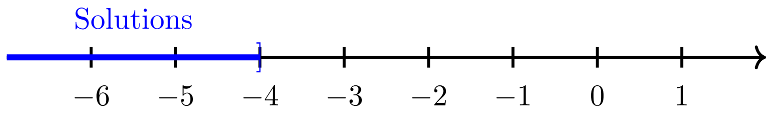
Résoudre $-3x + 2 \geqslant 14$.

1. On isole les x : $-3x \geqslant 14 - 2 \iff -3x \geqslant 12$.

2. On divise par -3 (négatif), donc on **inverse** le sens ($\geqslant$ devient $\leqslant$) :

$$x \leqslant \frac{12}{-3} \iff x \leqslant -4$$

Les solutions sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -4.



Solutions de l'inéquation $x \leqslant -4$

Exemple

Problème : Un cinéma propose deux formules :

- Formule A : 8 euros par séance.
- Formule B : un abonnement de 30 euros puis 3 euros par séance.

À partir de combien de séances la formule B est-elle plus avantageuse ?

On note x le nombre de séances. On cherche quand le coût B est inférieur au coût A :

$$30 + 3x < 8x$$

On résout :

$30 < 8x - 3x \iff 30 < 5x \iff x > 6$

La formule B est plus avantageuse **à partir de 7 séances**.

5. Modéliser un problème

Mettre un problème en équation

Pour résoudre un problème, on suit généralement 4 étapes :

1. **Choix de l'inconnue** : Définir ce que représente x.
2. **Mise en équation** : Traduire le texte mathématiquement.
3. **Résolution** : Résoudre l'équation trouvée.
4. **Conclusion** : Interpréter le résultat et répondre à la question posée.

Exemple

Énoncé : Paul a 15 ans et son père a 40 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il exactement le double de celui de Paul ?

Résolution :

1. **Choix de l'inconnue** :

   Soit x le nombre d'années cherché.
2. **Mise en équation** :
3. Dans x années, Paul aura $15 + x$ ans.
4. Dans x années, son père aura $40 + x$ ans.

5. On veut que l'âge du père soit égal au **double** de l'âge de Paul :

$$40 + x = 2(15 + x)$$

3. **Résolution** :
   On développe et on réduit :
   $40 + x = 30 + 2x$
   On regroupe les x (ici à droite pour garder un coefficient positif, ou règle standard à gauche) :
   $40 - 30 = 2x - x$
   $10 = x$
4. **Conclusion** :
   Cela se produira dans **10 ans**.

Vérification : Dans 10 ans, Paul aura $15 + 10 = 25$ ans et son père $40 + 10 = 50$ ans. 50 est bien le double de 25.

Les questions essentielles

1. Comment résoudre une équation du premier degré ?

On regroupe les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre, on réduit chaque membre, puis on divise par le coefficient de x.

Voir la fiche méthode : Résoudre une équation du premier degré

2. Comment résoudre une équation produit-nul ?

On utilise la propriété : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. On résout alors chaque équation séparément. Si l'équation n'est pas factorisée, on factorise d'abord (identité remarquable, facteur commun).

Voir la fiche méthode : Résoudre une équation produit-nul

3. Comment résoudre une inéquation du premier degré ?

On procède comme pour une équation, avec une règle supplémentaire : quand on multiplie ou divise par un nombre négatif, on inverse le sens de l'inégalité.

Voir la fiche méthode : Résoudre une inéquation du premier degré

4. Comment mettre un problème en équation ou en inéquation ?

On suit 4 étapes : choisir l'inconnue, traduire le problème en équation (ou inéquation), résoudre, puis interpréter le résultat dans le contexte du problème.

Voir la fiche méthode : Mettre un problème en équation ou en inéquation

Télécharger en PDF