

Suites et récurrence

DURÉE ESTIMÉE

45 minutes

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Rédiger une démonstration par récurrence

Étudier le sens de variation d'une suite

Calculer la limite d'une suite

Appliquer le théorème des gendarmes

Démontrer la convergence d'une suite et trouver sa limite

I - Démonstration par récurrence



Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n .

- Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**)
- Et si $P(n)$ vraie entraîne $P(n + 1)$ vraie (**hérédité**)

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Rédiger une démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence s'apparente au « principe des dominos » : si le premier domino tombe et si chaque domino fait tomber le suivant, alors tous les dominos tombent.

Pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- **Initialisation** : vérifier que $P(n_0)$ est vraie. Cette étape est souvent facile, mais il ne faut pas l'oublier.
- **Hérédité** : supposer que $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq n_0$ (c'est l'**hypothèse de récurrence**), puis démontrer que $P(n+1)$ est alors vraie. Il est conseillé d'écrire explicitement ce que signifie $P(n+1)$ en remplaçant n par $n+1$ dans la propriété.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

Montrons que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation ($n = 1$)

La proposition devient $1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$, ce qui est vrai.

Hérédité

On suppose que pour un certain entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (hypothèse de récurrence)}$$

Montrons alors que $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On isole le dernier terme et on applique l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
 \end{aligned}$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

II - Sens de variation - Suites majorées, minorées

Sens de variation (rappel)

Soit (u_n) une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **strictement croissante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **strictement décroissante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n$.

Suites majorées, minorées, bornées

- La suite (u_n) est **majorée** par le réel M si pour tout entier naturel $n : u_n \leq M$. On dit que M est un **majorant** de (u_n) .
- La suite (u_n) est **minorée** par le réel m si pour tout entier naturel $n : u_n \geq m$. On dit que m est un **minorant** de (u_n) .
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque

Si la suite (u_n) est majorée (resp. minorée), les majorants (resp. minorants) **ne sont pas uniques**. Si M est un majorant de (u_n) , tout réel supérieur à M est aussi un majorant.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, donc la suite (u_n) est minorée par 1.

En revanche, cette suite n'est pas majorée : on peut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$.

III - Limites d'une suite

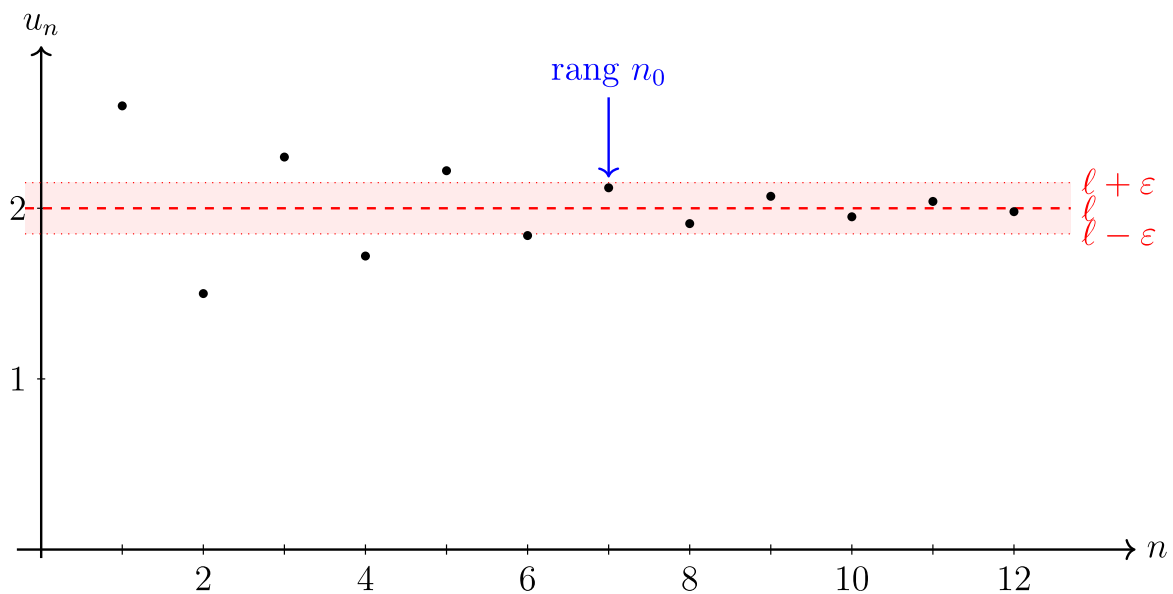
Limite finie (suite convergente)

On dit que la suite (u_n) **converge vers le réel l** (ou **admet pour limite l**) si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Graphiquement, cela signifie que tous les points (n, u_n) finissent par se concentrer dans une bande horizontale aussi étroite qu'on veut autour de l : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes sont dans $]l - \varepsilon ; l + \varepsilon[$.



Exemple

Les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n^k}$ où k est un entier strictement positif **convergent vers** 0.



Limite infinie

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On définit de façon analogue $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



Exemple

Les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = n^k$ où k est un entier strictement positif **divergent vers** $+\infty$.

Remarque

- Une suite qui n'est pas convergente (c'est-à-dire qui n'a pas de limite finie) est dite **divergente**. Une suite divergente peut avoir une limite infinie, ou n'avoir aucune limite (par exemple $u_n = (-1)^n$).
- Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est **unique**.

Limites usuelles

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, et plus généralement $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ pour tout entier $k \geq 1$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

IV - Opérations sur les limites



Somme, produit, quotient de limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et l, l' deux réels. Les tableaux ci-dessous donnent les limites de $u_n + v_n$, $u_n \times v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ selon les limites de (u_n) et (v_n) .

Somme $u_n + v_n$:

- $l + l' = l + l'$
- $l + (\pm\infty) = \pm\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (-\infty)$: forme indéterminée

Produit $u_n \times v_n$:

- $l \times l' = l \times l'$
- $l \times (\pm\infty) = \pm\infty$ selon le signe de l (si $l \neq 0$)
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- $0 \times (\pm\infty)$: forme indéterminée

Quotient $\frac{u_n}{v_n}$ (avec $v_n \neq 0$) :

- $\frac{l}{l'} = \frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$
- $\frac{l}{\pm\infty} = 0$
- $\frac{\pm\infty}{l'} = \pm\infty$ selon les signes (si $l' \neq 0$)
- $\frac{l}{0}$: limite infinie selon le signe de v_n au voisinage de 0

- $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$: formes indéterminées

Formes indéterminées

Il existe quatre formes indéterminées : $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Dans ces cas, la limite dépend des suites considérées : il faut **transformer l'expression** (factoriser, simplifier, mettre au même dénominateur) pour lever l'indétermination.

Exemple

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3n)$.

On est face à une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$. On factorise par n^2 :

$$n^2 - 3n = n^2 \left(1 - \frac{3}{n}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1$, donc par produit :

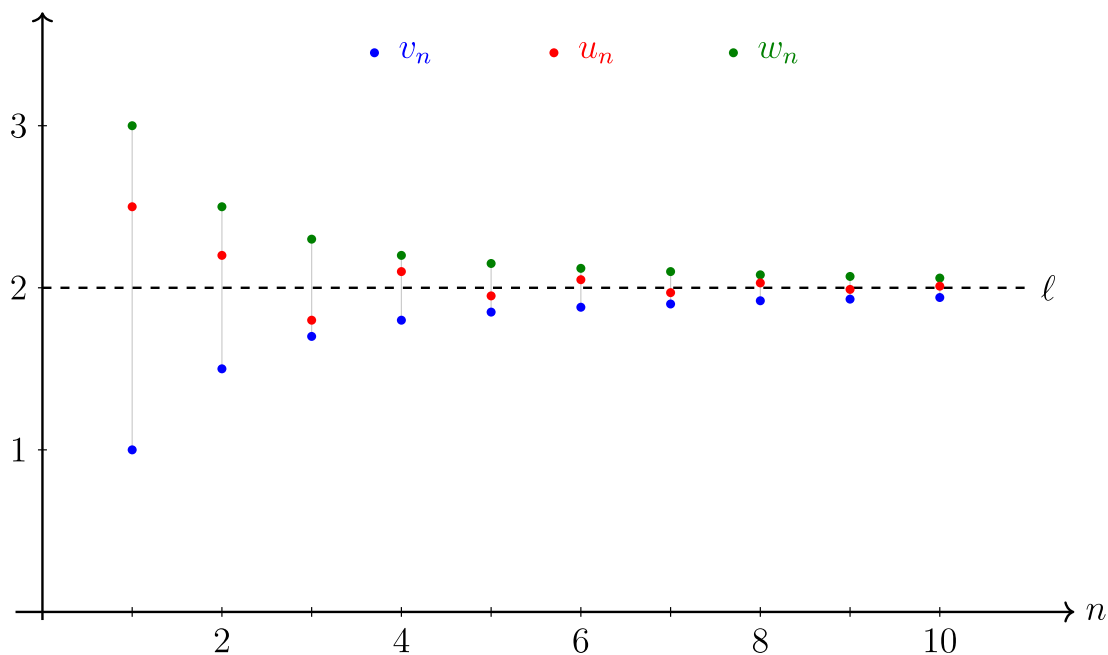
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3n) = +\infty$$

V - Théorèmes de comparaison

Théorème des gendarmes

Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l et si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors la suite (u_n) converge vers l .

L'image est celle d'un suspect (la suite u_n) « pris en sandwich » entre deux gendarmes $(v_n$ et $w_n)$ qui se rapprochent inéluctablement de la même limite l : le suspect est forcé d'aller au même endroit.



💡 Exemple

Soit la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

🏆 Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

VI - Théorème de convergence monotone



Théorème de convergence monotone

- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.



Remarque

- Ce théorème est très utilisé dans les exercices pour prouver qu'une suite a une limite.
- Il affirme l'**existence** de la limite mais ne permet pas, à lui seul, d'en déterminer la valeur.
- Une suite **croissante et non majorée** tend vers $+\infty$. De même, une suite **décroissante et non minorée** tend vers $-\infty$.



Exemple

Une suite **décroissante et positive** est convergente. En effet, elle est minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

VII - Suites géométriques : limite et somme

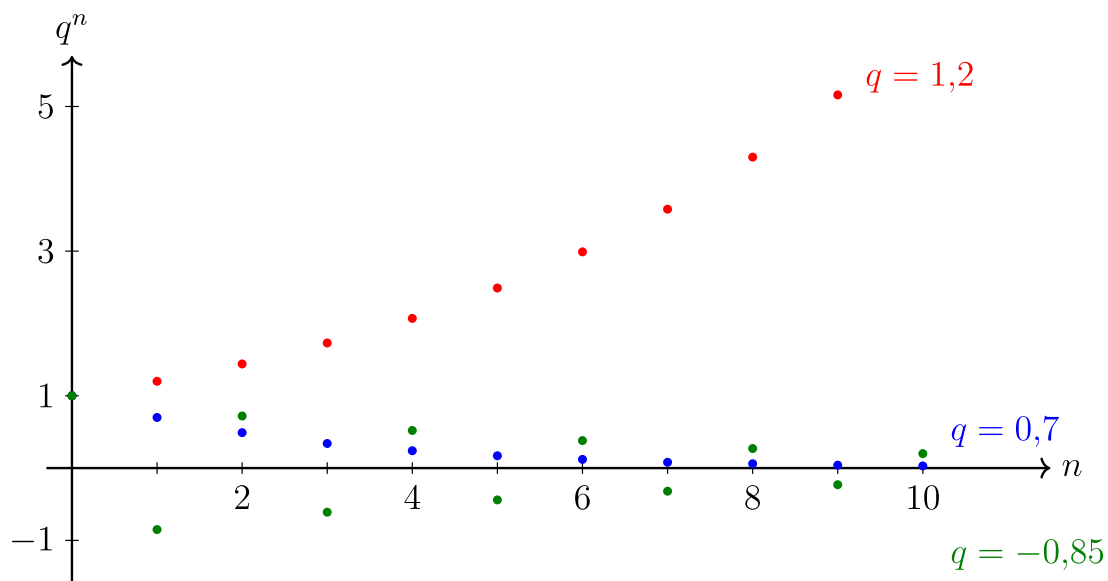


Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) **n'a pas de limite**.
- Si $q = 1$, la suite est constante égale à 1.

Le graphique ci-dessous illustre les trois comportements possibles selon la valeur de q .



💡 Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{2}{3} \in]-1 ; 1[.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \text{ car } \frac{4}{3} > 1.$$

🛡 Somme des termes d'une suite géométrique

Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Plus généralement, si (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple

Calculons $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$.

Il s'agit de la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Donc :

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2048}\right) = \frac{2047}{1024}$$

Remarque

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ et la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ admet une limite finie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \frac{1}{1 - q}$$

Les questions essentielles

1. Comment rédiger une démonstration par récurrence ?

On procède en trois étapes : initialisation (vérifier la propriété au rang n_0), hérédité (supposer $P(n)$ et prouver $P(n+1)$), puis conclusion. L'hypothèse de récurrence doit être clairement identifiée et utilisée.

Voir la fiche méthode : [Rédiger une démonstration par récurrence](#)

2. Comment savoir si une suite est croissante ou décroissante ?

Trois approches : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si termes positifs), ou étudier les variations de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

Voir la fiche méthode : [Étudier le sens de variation d'une suite](#)

3. Comment calculer la limite d'une suite quand on tombe sur une forme indéterminée ?

On factorise le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. Les termes en $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, etc. tendent vers 0, ce qui lève l'indétermination.

Voir la fiche méthode : [Calculer la limite d'une suite](#)

4. Comment utiliser le théorème des gendarmes ?

On encadre u_n entre deux suites v_n et w_n qui convergent vers la même limite l .

D'après le théorème, u_n converge aussi vers l . L'encadrement provient souvent d'inégalités classiques ($|\sin| \leq 1$, $|\cos| \leq 1$).

Voir la fiche méthode : [Appliquer le théorème des gendarmes](#)

5. Comment prouver qu'une suite converge et trouver sa limite ?

On montre que la suite est monotone (croissante ou décroissante) et bornée (majorée ou minorée), puis on applique le théorème de convergence monotone. Pour trouver la valeur de la limite l , on résout l'équation $l = f(l)$.

Voir la fiche méthode : [Démontrer la convergence d'une suite et trouver sa limite](#)