

Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace

DURÉE ESTIMÉE

25 minutes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Calculer un produit scalaire dans l'espace

Démontrer que des droites sont orthogonales dans l'espace

Déterminer une équation cartésienne de plan

Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan

Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan

Calculer la distance d'un point à une droite dans l'espace

1. Produit scalaire

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires (voir [Droites et plans dans l'espace](#)). On peut alors définir le produit scalaire dans l'espace à l'aide de la définition donnée en Première pour deux vecteurs d'un plan.

La plupart des propriétés vues en Première seront donc encore valables pour le produit scalaire dans l'espace, en particulier pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

La notion d'**orthogonalité de vecteurs** vue en Première est encore valable dans l'espace. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Les principales distinctions concernent les formules faisant intervenir les coordonnées puisque, dans l'espace, chaque vecteur possède trois coordonnées.

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans ce repère.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

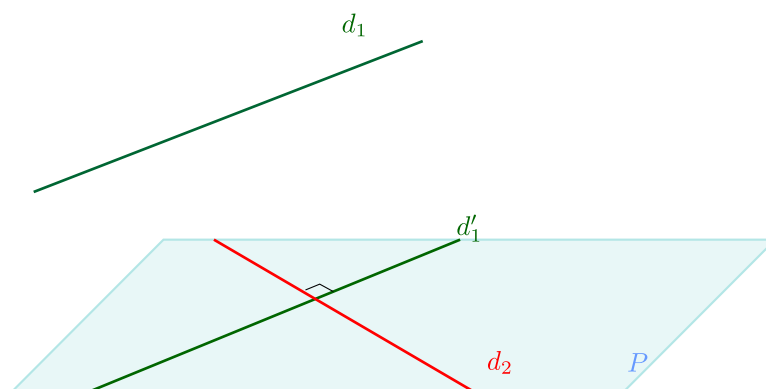
Conséquences

- $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

2. Orthogonalité dans l'espace

Définition

Deux droites d_1 et d_2 sont **orthogonales** si et seulement si il existe une droite qui est à la fois parallèle à d_1 et perpendiculaire à d_2



d_1 et d_2 sont orthogonales

Remarque

Attention à ne pas confondre *orthogonales* et *perpendiculaires*. Le terme *perpendiculaires* s'emploie uniquement pour des droites **sécantes** (donc **coplanaires**).

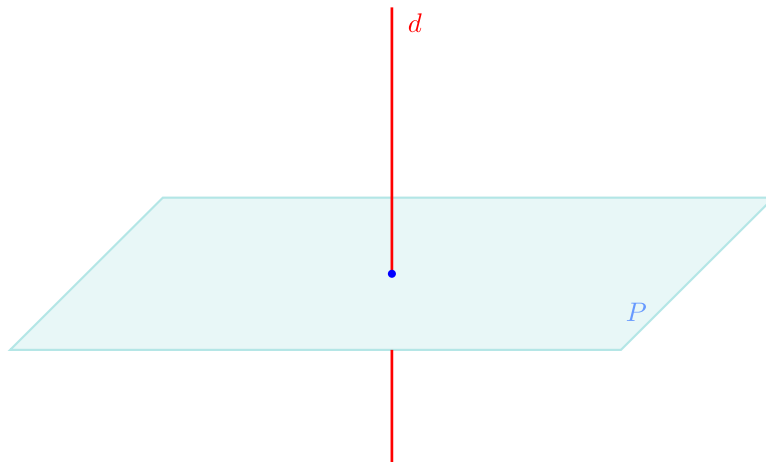
Propriété

Soient deux droites d_1 et d_2 , $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2 .

d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux, c'est à dire si et seulement si $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

Définition (Droite perpendiculaire à un plan)

Une droite d est **perpendiculaire** (ou **orthogonale**) à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.



Droite perpendiculaire à un plan

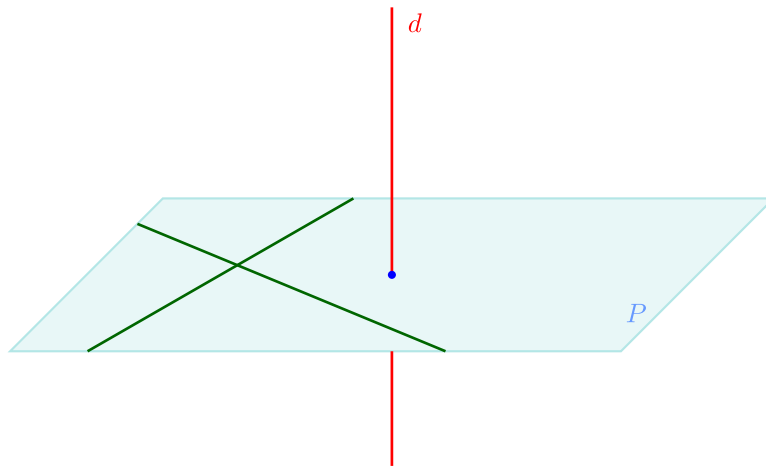
Remarque

Une droite orthogonale à un plan coupe nécessairement ce plan en un point. Il n'y a donc plus lieu

ici de distinguer orthogonalité et perpendicularité.

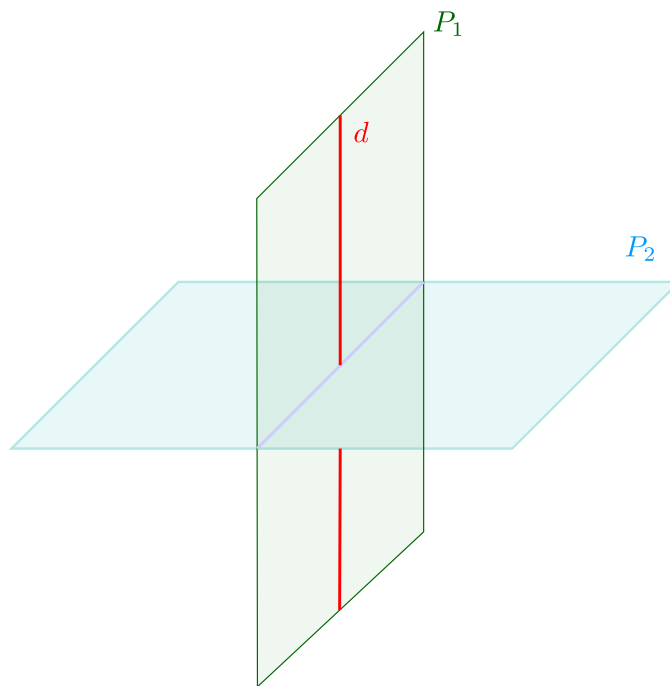
Propriété

La droite d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** incluses dans ce plan.



Définition (Plans perpendiculaires)

Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont **perpendiculaires** (ou **orthogonaux**) si et seulement si $\mathcal{P}_1$ contient une droite d perpendiculaire à $\mathcal{P}_2$.

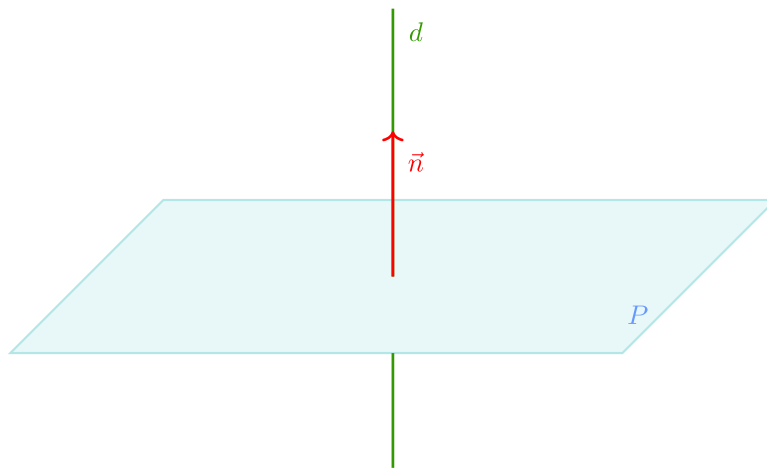


Remarque

Attention, cela ne signifie **pas** que toutes les droites de $\mathcal{P}_1$ sont orthogonales à toutes les droites de $\mathcal{P}_2$

Définition (Vecteur normal à un plan)

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est un vecteur **normal** au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si la droite dirigée par $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.



Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et soit A un point de $\mathcal{P}$.

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Théorème

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c sont les coordonnées de $\vec{n}$ et d un nombre réel.

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c, d étant des réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$) est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathcal{P}$:

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

et il suffit de poser $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Réciproquement, supposons par exemple $a \neq 0$.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ Les coordonnées de A vérifient :

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0.$$

On a alors $d = -ax_A - by_A - cz_A$ donc :

$$ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

donc $M(x; y; z)$ appartient au plan passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$

Exemple

On cherche une équation cartésienne du plan passant par $A(1; 3; -2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 1)$.

Ce plan admet une équation cartésienne de la forme :

$$(E) \quad x + y + z + d = 0$$

Le point $A(1; 3; -2)$ appartient à ce plan, donc les coordonnées de A vérifient l'équation (E) :

$$1 + 3 - 2 + d = 0 \text{ soit } d = -2$$

Une équation cartésienne du plan est donc :

$$(E) \quad x + y + z - 2 = 0$$

Propriété

- Une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
- Une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est colinéaire à un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

3. Projeté orthogonal

Définition (Projeté orthogonal sur un plan)

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan.

Le **projeté orthogonal** du point A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point H appartenant à $\mathcal{P}$ tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Définition (Projeté orthogonal sur une droite)

Soit A un point de l'espace et d une droite.

Le **projeté orthogonal** du point A sur la droite d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à d .

Propriété

Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A .

La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la distance AH .

Exemple

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z - 2 = 0$ et le point $B(3; 1; 2)$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(1; 1; 1)$.

La droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le projeté orthogonal H de B sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$.

On remplace dans l'équation du plan : $(3 + t) + (1 + t) + (2 + t) - 2 = 0$, soit $3t + 4 = 0$, d'où

$$t = -\frac{4}{3}.$$

On obtient $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

La distance de B au plan $\mathcal{P}$ est :

$$BH = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{3 \times \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Les questions essentielles

1. Comment calculer un produit scalaire dans l'espace ?

Dans un repère orthonormé, on utilise la formule avec les coordonnées : si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$. C'est la même formule qu'en Première, avec une troisième coordonnée.

Voir la fiche méthode : [Calculer un produit scalaire dans l'espace](#)

2. Comment démontrer que deux droites sont orthogonales ?

On calcule le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs. Si ce produit scalaire est nul, les droites sont orthogonales. Attention : dans l'espace, des droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes (contrairement aux droites perpendiculaires).

Voir la fiche méthode : [Démontrer que des droites sont orthogonales dans l'espace](#)

3. Comment déterminer une équation cartésienne de plan ?

On utilise un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ et un point A du plan. L'équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d se détermine en substituant les coordonnées de A .

Voir la fiche méthode : [Déterminer une équation cartésienne de plan](#)

4. Comment démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan ?

Deux approches : montrer qu'un vecteur directeur de la droite est colinéaire au vecteur normal du plan, ou montrer que la droite est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans le plan.

Voir la fiche méthode : [Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan](#)

5. Comment déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan ?

On trace la droite passant par le point et dirigée par le vecteur normal au plan (représentation paramétrique). On cherche l'intersection de cette droite avec le plan en substituant dans l'équation cartésienne.

Voir la fiche méthode : [Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan](#)

6. Comment calculer la distance d'un point à une droite dans l'espace ?

On détermine le projeté orthogonal du point sur la droite, puis la distance cherchée est la longueur entre le point et son projeté. La représentation paramétrique de la droite permet de localiser ce projeté.

Voir la fiche méthode : [Calculer la distance d'un point à une droite dans l'espace](#)