

Primitives, intégrales, équations différentielles

DURÉE ESTIMÉE

30 minutes

🎯 OBJECTIFS DU CHAPITRE

Déterminer les primitives d'une fonction

Calculer une intégrale

Calculer une intégrale par parties

Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

1. Primitives d'une fonction



Définition

Soit f une fonction définie sur I .

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I , si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.



Exemple

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de cette même fonction f .



Propriété

Si F est une primitive de f sur I , alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque

Une fonction continue ayant une infinité de primitives, il ne faut pas dire **la** primitive de f mais **une** primitive de f .

Exemple

Les primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sont les fonctions $F : x \mapsto x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Propriété

Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f	Primitives F	Ensemble de validité
0	k	$\mathbb{R}$
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}; n > 1)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$

Propriété

Si f et g sont deux fonctions définies sur I et admettant respectivement F et G comme primitives sur I et k un réel quelconque.

- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I .
- kF est une primitive de la fonction kf sur I .

Propriété

Primitives et fonctions composées

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Fonction f	Primitives F	Condition
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$	si $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^n} \ (n \in \mathbb{N}; n > 1)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k$	si $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	si $u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + k$	
$u' \cos u$	$\sin u + k$	
$u' \sin u$	$-\cos u + k$	

Exemple

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ admet comme primitives les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(x^2+1) + k$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ (forme $\frac{u'}{u}$).

2. Intégrales



Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. **L'intégrale de a à b de f** est le nombre réel noté $\int_a^b f(x) dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$



Remarques

- L'intégrale ne dépend pas de la primitive de f choisie.

En effet si G est une autre primitive de f , on a $G = F + k$ donc :

$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

- Dans l'expression $\int_a^b f(x) dx$, x est une variable « muette ». C'est à dire que l'on ne change pas l'expression si on remplace x par une autre lettre. En pratique, on emploie souvent la lettre t notamment lorsque la lettre x est employée par ailleurs.



Notations

On note souvent : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

On a avec cette notation :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$



Exemple

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction carré.

On a donc :

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$



Théorème (intégrale fonction de sa borne supérieure)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$; la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$.



Démonstration

Soit F une primitive (quelconque) de f . Posons $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

donc :

$$\Phi'(x) = F'(x) = f(x).$$

Ce qui prouve que Φ est aussi une primitive de f .

$$\text{De plus } \Phi(a) = F(a) - F(a) = 0.$$



Remarque

Notez bien la position du x en borne supérieure de l'intégrale.



Exemple

La fonction définie sur $[0; +\infty[$ $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$ (on peut aussi écrire $\int_1^x \frac{dt}{t}$) est la primitive de la fonction inverse qui s'annule pour $x = 1$. C'est donc la fonction logarithme népérien :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$



Propriété

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et $c \in [a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Propriété

Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$



Propriété

Comparaison d'intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que $f \geq g$ sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Remarque

En particulier, en prenant pour g la fonction nulle on obtient si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$:

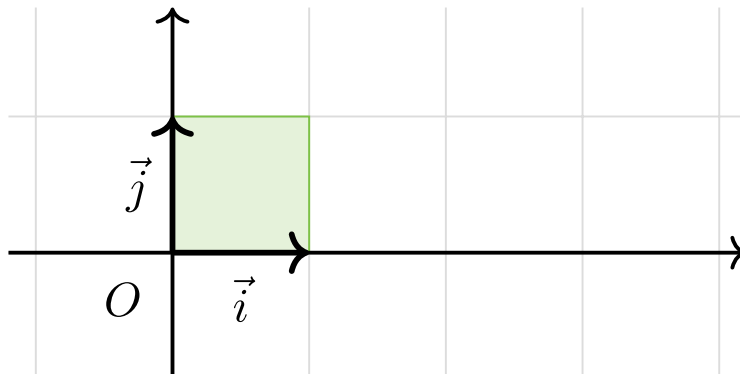
$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

3. Interprétation graphique

Définition

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle **unité d'aire (u.a.)** l'aire d'un rectangle (qui est un carré si le repère est orthonormé) dont les côtés mesurent $||\vec{i}||$ et $||\vec{j}||$.



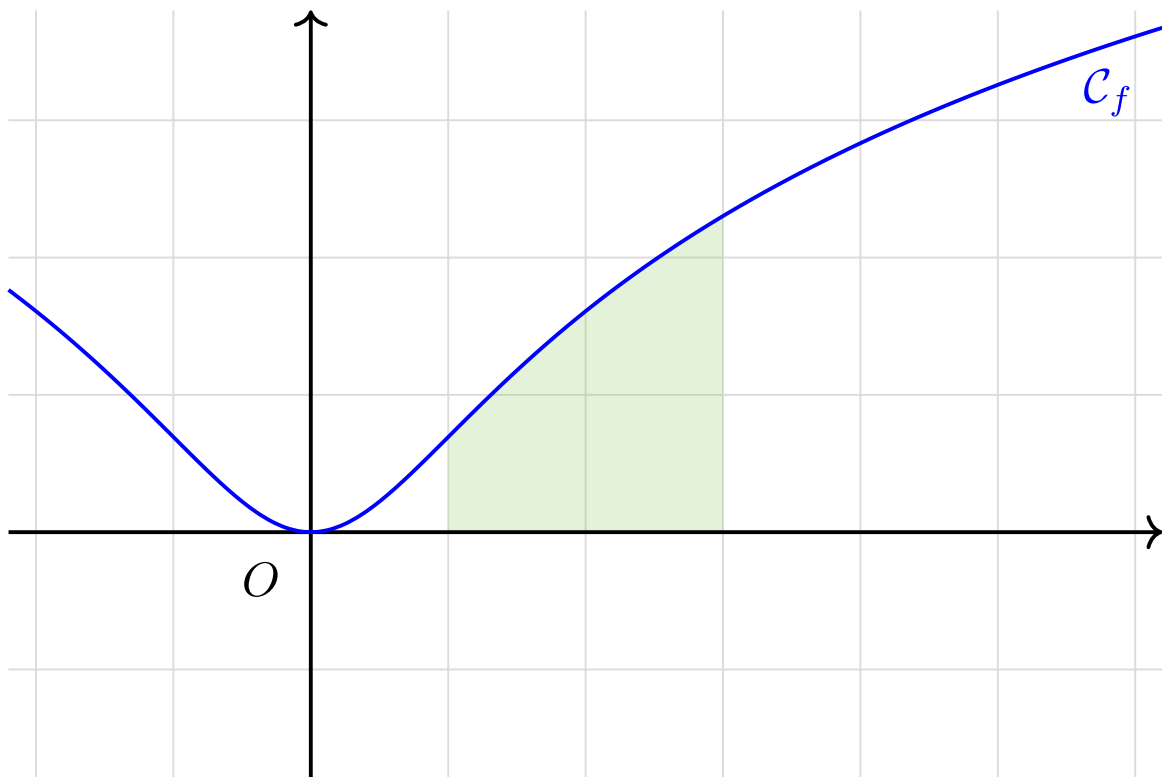
Unité d'aire dans le cas d'un repère orthonormé

Propriété

Si f est une fonction continue et **positive** sur $[a; b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) \, dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe C_f ,
- l'axe des abscisses,
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exemple



L'aire colorée ci-dessus est égale (en unités d'aire) à $\int_1^3 f(x) \, dx$.

Remarques

- Si f est négative sur $[a; b]$, la propriété précédente appliquée à la fonction $-f$ montre que $\int_a^b f(x) \, dx$ est égale à l'**opposé** de l'aire délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- Si le signe de f varie sur $[a; b]$, on découpe $[a; b]$ en sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Propriété

Si f et g sont des fonctions continues et telles que $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors l'aire de la surface délimitée par :

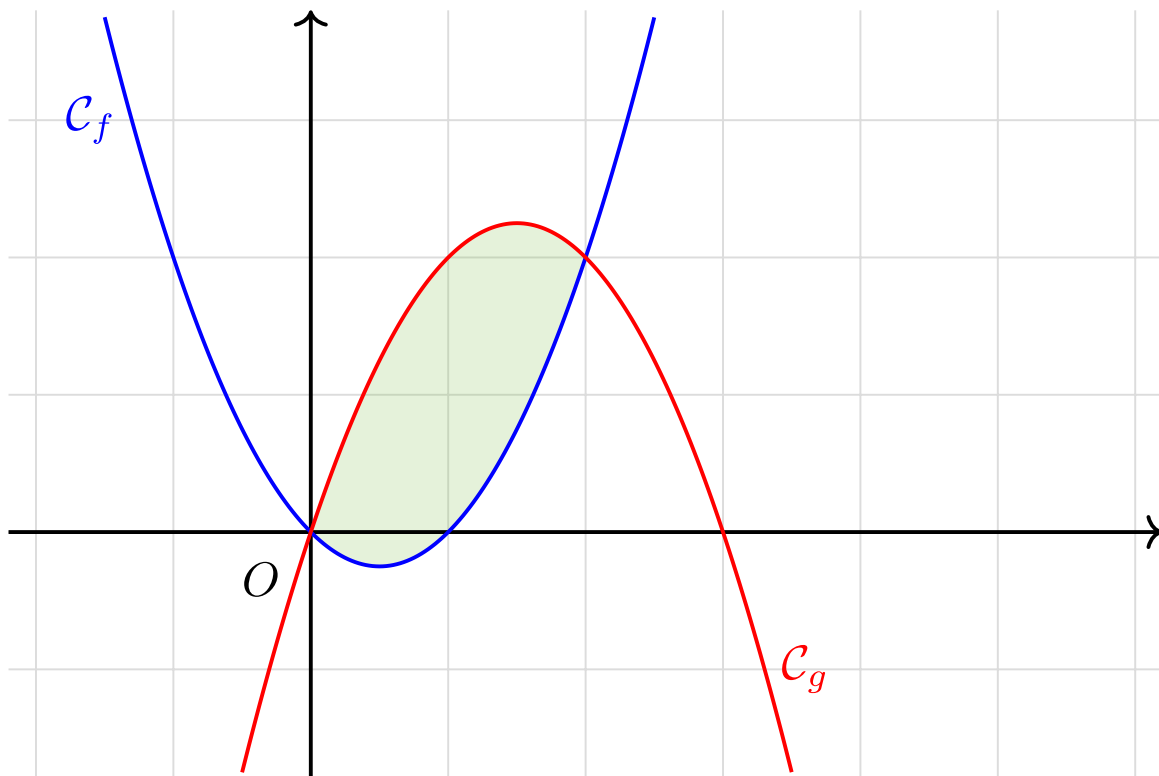
- la courbe C_f ,
- la courbe C_g ,
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$.

est égale (en unités d'aire) à :

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

Exemple

f et g définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 3x - x^2$ sont représentées par les paraboles ci-dessous :



L'aire colorée est égale (en unités d'aire) à :

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) \, dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

4. Intégration par parties



Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ dont les dérivées sont continues.

$$\int_a^b u'(x) v(x) \, dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) \, dx$$



Exemple

Calculer $I = \int_0^1 x e^x \, dx$.

On pose $v(x) = x$ et $u'(x) = e^x$, ce qui donne $v'(x) = 1$ et $u(x) = e^x$.

La formule d'intégration par parties donne :

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Exemple

Calculer $J = \int_1^e \ln x dx$.

On écrit $\ln x = 1 \times \ln x$ et on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$, ce qui donne $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$J = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - 1 \times \ln 1 - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

5. Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a \neq b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Remarque

Graphiquement, la valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ ayant la même aire que la surface délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$.

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[0; 3]$.

$$\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times \frac{27}{3} = \frac{1}{3} \times 9 = 3.$$

6. Équation différentielle

Définition

Une équation différentielle est une égalité mettant en relation une fonction et sa dérivée (ou ses dérivées successives).

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I , consiste à trouver l'ensemble des fonctions dérivables sur I qui vérifie l'égalité pour tout $x \in I$

Notations

Attention aux notations :

Dans une équation différentielle, l'usage est de noter y pour $f(x)$, y' pour $f'(x)$ etc.

L'équation différentielle $f'(x) = f(x) + x$ s'écrira par exemple $y' = y + x$.

Cette notation ne doit pas faire oublier que les solutions recherchées sont des fonctions !

Exemple

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :
 $2y = xy'$.

En effet : $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$ donc $2f(x) = x \times f'(x)$

Théorème

Les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = ay$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions définies par $f(x) = Ke^{ax}$ où K est un réel quelconque.

Démonstration

Soit une fonction f définie par $f(x) = Ke^{ax}$ où K est un réel quelconque.

$f'(x) = aKe^{ax}$ donc $f'(x) = af(x)$ et f est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$

Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

On a $f'(x) = af(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons $g(x) = f(x)e^{-ax}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = (f'(x) - af(x))e^{-ax} = 0.$$

g est donc une fonction constante : $g(x) = K$.

Donc $f(x)e^{-ax} = K$, c'est à dire en multipliant chaque membre par e^{ax} : $f(x) = Ke^{ax}$

Théorème

Les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions définies par $f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où K est un réel quelconque.

Théorème

Soit (x_0, y_0) un couple de réels.

Il existe une unique fonction f solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$

 Remarque

La condition $f(x_0) = y_0$ est souvent appelée **condition initiale**.

Les questions essentielles

1. Comment déterminer les primitives d'une fonction ?

Il faut identifier la forme de la fonction (usuelle ou composée), repérer la ligne correspondante dans le tableau des primitives, puis écrire la primitive en n'oubliant pas la constante $+k$.

Voir la fiche méthode : [Déterminer les primitives d'une fonction](#)

2. Comment calculer une intégrale ?

On détermine une primitive F de f , puis on applique la formule

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. La relation de Chasles et la linéarité permettent de découper ou simplifier les calculs.

Voir la fiche méthode : [Calculer une intégrale](#)

3. Comment calculer une intégrale par parties ?

On choisit u' et v dans le produit à intégrer de sorte que la nouvelle intégrale soit plus simple. On applique la formule $\int u'v = [uv] - \int uv'$. L'astuce pour $\ln x$ est d'écrire $\ln x = 1 \times \ln x$.

Voir la fiche méthode : [Calculer une intégrale par parties](#)

4. Comment calculer une aire à l'aide d'une intégrale ?

Si f est positive sur $[a ; b]$, l'aire sous la courbe est $\int_a^b f(x) \, dx$. Pour l'aire entre deux courbes $f \leq g$, on calcule $\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$. Si f change de signe, on découpe l'intervalle.

Voir la fiche méthode : [Calculer une aire à l'aide d'une intégrale](#)

5. Comment calculer la valeur moyenne d'une fonction ?

On applique la formule $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$: on calcule d'abord l'intégrale, puis on divise par la longueur de l'intervalle.

Voir la fiche méthode : [Calculer la valeur moyenne d'une fonction](#)

6. Comment résoudre une équation différentielle $y'=ay+b$?

Les solutions sont de la forme $f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$. Si une condition initiale est donnée, on remplace pour trouver la valeur de K et obtenir l'unique solution particulière.

Voir la fiche méthode : [Résoudre une équation différentielle \$y'=ay+b\$](#)